Matematica e Statistica
I Appello, 29/01/2021

Il tempo a disposizione è di 4 ore. È possibile usare una calcolatrice non programmabile. Non è consentito consultare testi o appunti. Giustificare quanto più possibile le risposte e scrivere anche svolgimenti parziali degli esercizi. Non verrà attribuito nessun punteggio numerico alla prova.

Nota. Si ricordi che il simbolo "log" indica il logaritmo in base e.

Analisi Matematica.

1) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{a}{2}+na^3}$$

converge. Per tali valori calcolarne la somma.

2) Scrivere il polinomio di Taylor di quinto grado per la funzione $f(x) = \log(1+x)$, nel punto $x_0 = 0$. Inoltre esprimere l'errore di approssimazione locale di tale polinomio (rispetto alla funzione f) in due modi diversi.

3) Si consideri la seguente funzione dipendente da due parametri $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin(bx) & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studiare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ i punti in cui f è rispettivamente: (i) continua; (ii) derivabile; (iii) derivabile due volte.

4) Calcolare (giustificando la risposta) l'area dell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Probabiltà e Statistica

5) Siano X e Y due variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti aventi parametro $p \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Si consideri inoltre la variabile aleatoria Z definita nel seguente modo:

$$Z := \begin{cases} 1 & \text{se } X \neq Y \\ 0 & \text{se } X = Y \end{cases}$$

   a) Calcolare $P(Z = 0)$ e $P(Z = 1)$.

   b) Dimostrare che X, Y,Z sono dipendenti.

   c) Dimostrare rispettivamente che X e Z sono dipendenti e che Y e Z sono dipendenti.

   (*Suggerimento: Per capire bene la definizione di Z, si ricordi che le variabili aleatorie sono funzioni.*)

6) Sia X una variabile aleatoria continua. Dimostrare che valgono le seguenti proprietà:

   a) La distribuzione di probabilità F_X soddisfa la disequazione $0 \leq F_X \leq 1$

   b) La densità f_X è una funzione non negativa.

7) AirFizz e RyanBla sono due compagnie aeree competitive sulla stessa rotta Venezia-Londra, entrambe con il medesimo orario di partenza. Si supponga che ogni giorno 1000 passeggeri debbano andare da Venezia a Londra, e che ogni passeggero scelga a caso una delle due compagnie con probabilità $p = \frac{1}{2}$, indipendentemente dalla scelta degli altri passeggeri. Airfizz ovviamente vuole far viaggiare il numero maggiore possibile di passeggeri. Ad esempio, essa potrebbe disporre di un aereo con 1000 posti a sedere, ma ciò sarebbe economicamente svantaggioso, poichè ci si aspetta che sia difficile avere ogni giorno tutti e 1000 passeggeri. Dunque AirFizz opta per la costruzione di un aereo più piccolo, decidendo di essere disposta ad accettare fino al 5% di probabilità di avere passeggeri in overbooking[1]. Quanti posti dovrà avere l'aereo di AirFizz?

   (*Suggerimento: la scelta dell' i-esimo passeggero è una variabile aleatoria di Bernoulli X_i. Siamo interessati alla variabile aleatoria che descrive **il numero totale** di passeggeri sull'aereo.*)

[1] Significa che 5% è la probabilità di rifiutare di imbarcare dei passeggeri poichè l'aereo è pieno.