Esercitazione Finale

June 5, 2021

1) Siano A, A', B, B' quattro punti distinti di $\mathbb{P}^2(K)$ non tutti allineati. Si dimostri che A, A', B, B' sono in posizione generale se e solo se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ tale che $f(A) = B$, $f(A') = B'$, $f^2 = \mathrm{Id}$.

2) Si consideri al variare dei parametri $a, b, c \in C$ la curva C di $\mathbb{C}^2$ di equazione:
$$f(x, y) = x^3(x^2 + a) + y(x^3 - x^2y + by + c) = 0.$$
   a) Si calcolino la molteplicità del punto $O = (0, 0)$ e le tangenti principali a C in O. Nel caso in cui O sia un punto semplice, si determini la molteplicità di intersezione in O tra C e la retta tangente a C in O.

   b) Si determinino i punti all'infinito e gli asintoti di C.

   c) Si determinino i valori di a, b, c per cui il punto $Q = (0, 2)$ sia un punto singolare di C e, per tali valori, si calcoli la molteplicità di Q per C.

3) Classificare, trovare la forma canonica, il cambio di riferimento e disegnare la seguente conica:
$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$$

4) Sia $S' \subset \mathbb{R}^3$ il luogo dei punti ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x il grafico della funzione $y = \cos x$.

   a) Parametrizzare S' e spiegare perchè S' non è una superficie differenziabile.

   b) Trovare un adeguato sottoinsieme $S \subset S'$ che sia una superficie parametrica. Inoltre per S calcolare rispettivamente: la prima forma fondamentale, la seconda forma fondamentale e la curvatura di Gauss.

   c) Descrivere i punti parabolici, ellittici ed iperbolici di S.

5) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua fra due spazi topologici. Dimostrare che f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$. Sia inoltre $x \in X$ un punto di accumulazione per A; è vero o falso che $f(x)$ è un punto di accumulazione per $f(A)$?

6) Sia $L \subset \mathcal{H}$ una geodetica del piano iperbolico. Dimostrare che esiste una trasformazione di Möbius γ che mappa L in maniera biettiva sul semiasse immaginario.