Sheet 4

November 7, 2021

8) Fornire un esempio di due sottospazi vettoriali propri U_1 e U_2 di uno spazio vettoriale V tali che $U_1 \cup U_2$ sia ancora un sottospazio vettoriale.

9) Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $A \subset V$ un sottoinsieme. Dimostrare che

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \colon n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, v_1, \ldots, v_n \in A \right\}$$

10) Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(1,1,1,2)^t$ e $(3,0,0,-1)^t$, e sia $S \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2w = 0 \end{cases}$$

Determinare $T \cap S$.

11) Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ non può essere espresso come unione finita di sottospazi descritti da equazioni cartesiane del tipo

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$$

per certi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.