

# Traccia 2

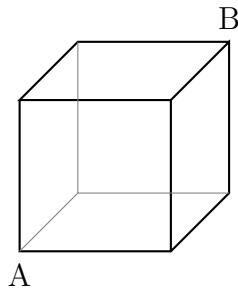
## Analisi Matematica.

- 1) Una successione  $\{x_n\}$  è detta *di Cauchy* se vale la seguente proprietà:

“per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero positivo  $N$  tale che per ogni  $n, m > N$ , si ha  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .”

Dimostrare che se  $\{x_n\}$  converge ad un valore finito, allora è una successione di Cauchy.

- 2) Una formica, partendo dal vertice  $A$  deve arrivare nel vertice  $B$  camminando sulla superficie del seguente cubo di lato  $\ell$ .



Qual è la distanza *minima* che la formica dovrà percorrere? E invece la distanza *massima*?

- 3) Si consideri l'integrale:

$$\Gamma(n) := \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Dimostrare che  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

(Suggerimento: procedere per induzione su  $n$ )

- 4) Studiare al variare di  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + a^n)$$

Inoltre calcolarne la somma nei casi in cui si ha convergenza.

## Probabilità e Statistica

- 5) Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie discrete indipendenti. Cosa si può dire riguardo all'indipendenza di  $X^2$  e  $Y^2$ ? Argomentare.
  
- 6) Si consideri il seguente gioco d'azzardo: si lancia  $N$  volte una moneta non truccata, se al  $k$ -esimo lancio esce testa, si vincono  $2^{k+1}$  euro, altrimenti si perdono  $2^k$  euro.
  - a) Definire la variabile aleatoria che descrive il gioco.
  - b) Per poter partecipare al gioco è fissato un prezzo d'ingresso di  $2^N$  euro. Dal punto di vista della teoria delle probabilità, è conveniente giocare a questo gioco?
  
- 7) Si lanci 100 volte una moneta non truccata. Stimare la probabilità che esca testa almeno 30 volte. Stimare inoltre la probabilità che esca testa al più 5 volte.