

Matematica e Statistica

VI Appello, 20/09/2021

Il tempo a disposizione è di 4 ore. È possibile usare una calcolatrice non programmabile. Non è consentito consultare testi o appunti. Giustificare quanto più possibile le risposte e scrivere anche svolgimenti parziali degli esercizi. Non verrà attribuito nessun punteggio numerico alla prova.

Nota. Si ricordi che il simbolo “log” indica il logaritmo in base e .

Analisi Matematica.

- 1) Si consideri un LED (inizialmente spento) collegato ad un timer. Il timer viene avviato ed il LED emette un flash dopo 30 secondi, poi un altro flash dopo altri 15 secondi, ancora un altro flash dopo ulteriori 7,5 secondi, e così via... Stabilire, argomentando la risposta, quante volte si sarà accesa la luce nel primo minuto.
- 2) Calcolare l'area della regione di piano compresa tra le funzioni f e g descritte di seguito. Disegnare inoltre approssimativamente la regione in questione.
 - a) $f(x) = \log x$, $g(x) = 1 + x$; per $x \in [1, e]$
 - b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^{-x}$; per $x \in [0, 1]$
- 3) Si consideri la funzione $f(x) = x^2\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ dove α è un parametro reale positivo.
 - a) Studiare la funzione f al variare di α , tralasciando lo studio della convessità.
 - b) Spiegare come cambia il grafico di f al crescere del parametro α .
- 4) Calcolare i due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

Probabilità e Statistica

- 5) Si supponga che il numero di chilometri X che un'automobile può percorrere prima che la sua batteria si scarichi sia descritto accuratamente da una variabile aleatoria esponenziale con valore atteso pari a 10000 km. Se un uomo possiede un'automobile, non nuova, qual è la probabilità che riesca a compiere un viaggio di 5000 km senza dover cambiare la batteria della propria vettura?
- 6) Il tempo di vita di un chip prodotto da una certa fabbrica di semiconduttori è descritto da una variabile aleatoria normale con media $\mu = 1.4 \cdot 10^6$ e deviazione standard $\sigma = 3 \cdot 10^5$ (in ore). Qual è la probabilità che su un campione di 100 chip ce ne siano almeno 20 il cui tempo di vita è inferiore a $1.8 \cdot 10^6$ ore?
- 7) Si considerino tre sacchetti (esternamente uguali) contenenti ognuno 100 biglie così distribuite:
- Sacchetto 1: 75 biglie rosse, 25 biglie blu
 - Sacchetto 2: 60 biglie rosse, 40 biglie blu
 - Sacchetto 3: 45 biglie rosse, 55 biglie blu

Si sceglie uno dei tre sacchetti a caso, e poi da ognuno di essi si estrae una biglia, ancora a caso. Qual è la probabilità che tale biglia estratta sia rossa?