

Matematica e Statistica

III Appello, 17/02/2022

Il tempo a disposizione è di 4 ore. È possibile usare una calcolatrice non programmabile. Non è consentito consultare testi o appunti. Giustificare quanto più possibile le risposte e scrivere anche svolgimenti parziali degli esercizi. Non verrà attribuito nessun punteggio numerico alla prova.

Nota. Si ricordi che il simbolo “log” indica il logaritmo in base e .

Analisi Matematica.

1) Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - x^x)}{(1 - \cos x) \log x}.$$

2) Stabilire se le seguenti successioni sono limitate:

(a) $x_n = \frac{2n^2 - 1}{n}$, per $n > 0$.

(b) $x_n = \frac{2n - 1}{n + 5}$.

(c) $x_n = (-1)^n \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$.

3) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{e^2} \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

4) Si consideri la seguente funzione dipendente dai due parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha 3^x + 5\beta & \text{se } x < 1 \\ \alpha x + \beta x^2 - 12 \log 3 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Si determinino α e β tali per cui:

(a) f risulti continua in tutto il suo dominio.

(b) f' risulti derivabile sullo stesso dominio di f .

Probabilità e Statistica

- 5) Una scuola elementare offre due corsi opzionali di lingua straniera, uno di francese e uno di spagnolo. Questi corsi sono aperti a tutti i 120 studenti delle ultime classi della scuola. Supponiamo che 32 studenti frequentino il corso di francese, 36 il corso di spagnolo, e 60 almeno un corso. Se scegliamo casualmente uno studente delle ultime classi, qual è la probabilità che questo studente frequenti entrambi i corsi di lingue?

- 6) La distribuzione del tempo di vita di un nuovo smartphone (misurato in giorni) è normale con media $\mu = 800$ e deviazione standard $\sigma = 120$.
 - (a) Qual è la probabilità di sostituire uno qualsiasi degli smartphone se si fissa la durata di garanzia pari a 600 giorni?
 - (b) Quale durata deve avere la garanzia affinché solo il 9% degli smartphone debba essere sostituito?

- 7) Sia X una variabile aleatoria continua. Spiegare cosa sono rispettivamente la funzione di distribuzione F_X e la funzione di densità f_X . Descrivere inoltre le principali proprietà analitiche di F_X ed f_X .