Sheet 6

February 24, 2021

15) Sia $f : V \to W$ un isomorfismo fra due spazi vettoriali. Dimostrare che esistono rispettivamente una base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{C}$ di W tali per cui la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è l'identità.

16) Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \to V$ una funzione lineare. Dimostrare che f è un multiplo dell'identità se e solo se $f(v)$ è un multiplo di v per ogni vettore $v \in V$.

17) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $f : V \to V$ una funzione lineare con traccia t e determinante d. Dimostrare che se f non è un multiplo dell'identità allora esiste sempre una base $\mathcal{B}$ di V tale per cui la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

18) Sia $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che se T ha ordine finito allora la sua traccia verifica la disuguaglianza $|\operatorname{Tr}(T)| \leq 2$. Dedurre che le matrici di ordine finito in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ hanno ordine $1, 2, 3, 4$ o 6.