Sheet 1

November 12, 2020

1) Risolvere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_5 + x_6 = -2 \\ -x_1 - 2x_2 - (a+1)x_5 - x_6 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + a^2x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + (a+2)x_5 - x_6 = -6 \end{cases}$$

2) Siano U e W due sottospazi vettoriali (non triviali) di uno spazio vettoriale V.

(i) Dimostrare che $\langle U, W \rangle = U + W$.

(ii) Dimostrare che $\langle U, W \rangle$ è il sottospazio minimale contenente $U \cup W$.

(iii) Dare rispettivamente un esempio in cui $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale e un esempio in cui non lo è.

Esercizio per casa: generalizzare 2)(i)-(ii) al caso di un numero finito di sottospazi vettoriali di V.

3) Si consideri il gruppo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \colon ad - bc = 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è generato da i seguenti elementi:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$