Esercitazione finale

May 31, 2021

1) Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ aventi come basi rispettivamente $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

   a) Determinare tutte le applicazioni lineari $f : V \to W$ che soddisfano le seguenti condizioni:
$$f(v_1 - 2v_3 + v_5) = f(v_4 - v_2) = 2w_1 - 2w_3\,,$$
$$f(-2v_3) = 4w_4 - 2w_1\,,$$
$$f(v_2 + 2v_3 + v_4) = f(v_5 - v_1) = 4w_2 - 2w_4\,.$$

   b) Per tutte le applicazioni trovate nel punto precedente esprimere i nuclei e le immagini in equazioni parametriche e cartesiane.

2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo descritto dalla seguente matrice rispetto alla base canonica:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Trovare la forma canonica di Jordan ed una base di Jordan per A. Inoltre calcolare esplicitamente A^{99}.

3) Sia K un campo qualsiasi e sia A una matrice quadrata a coefficienti in K tale che $A^3 = A$. Dimostrare che A è diagonalizzabile su K.

4) Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ con il riferimento canonico $(O; e_1, \dots, e_5)$ si considerino i seguenti sottospazi affini:
$$L : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$
$$M : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

   a) Si determini la posizione reciproca di L ed M. Si calcolino inoltre $L \cap M$ e $\langle L, M \rangle$.

b) Si consideri il punto $P = O + e_1$. Determinare le equazioni cartesiane di un sottospazio lineare T contenente P, di dimensione 3 e tale che T intersechi sia L che M.

c) Si determini, scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento, un'affinità f di $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ tale che $f(L) = M$ e $f^2 = \mathrm{id}$. È vero che ogni affinità che verifica le condizioni precedenti ha almeno un punto fisso?