

Sheet 3

December 3, 2020

- 7) Sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare fra due spazi vettoriali (di dimensione finita). Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
- a) f è suriettiva se e solo se esiste una funzione lineare $g : W \rightarrow V$ tale che $f \circ g = \text{id}$.
 - b) f è iniettiva se e solo se esiste una funzione lineare $h : W \rightarrow V$ tale che $h \circ f = \text{id}$.
- 8) Sia K un campo e sia $f : K^m \rightarrow K^n$ una funzione lineare. Dimostrare che esiste una matrice $A \in M_{n \times m}(K)$ con la seguente proprietà: per ogni $v \in K^m$, esiste un unico vettore x_v tale per cui $f(v) = Ax_v$. Si discuta l'eventuale unicità di tale A .
- 9) Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 :

$$U_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Si determinino delle basi per $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$.

- 10) Si scriva un esempio di una funzione lineare iniettiva $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ tale che $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ appartenga all'immagine di f .