Sheet 7

May 20, 2021

17) Sia K un campo, allora un valore assoluto (non banale) su K è una funzione:

$$\begin{aligned} |\cdot|\colon K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

- $|x| \geq 0$, per ogni $x \in K$.
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|xy| = |x|\,|y|$, per ogni $x, y \in K$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$, per ogni $x, y \in K$
- Esiste un $a \in K^\times$ tale che $|a| \neq 1$

Rispondere ai seguenti quesiti:

a) Verificare che la funzione $d(x,y) := |x-y|$ è una metrica su K.

b) Esiste una metrica su K che non è indotta da a alcun valore assoluto? (Ovvero cerchiamo una metrica non esprimibile come nel punto *a*))

c) Due valori assoluti $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ su K si dicono *equivalenti* se inducono la stessa topologia su K (tramite la metrica definita nel punto *a*)). Dimostrare che $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ sono equivalenti se e solo se esiste un numero $s \in \mathbb{R}_{>0}$ tale per cui $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^s$.

18) Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea e si definisca il seguente insieme

$$E = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right) : n = 1, 2, 3\ldots \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Stabilire se E è aperto, chiuso, oppure nessuno dei due. Determinare la chiusura di $E \in \mathbb{R}^2$.

19) Sia (X,d) uno spazio metrico contenente un sottoinsieme D denso e numerabile. Dimostrare che ogni aperto U di X è unione numerabile di palle con centro in D e di raggio razionale.

20) Sia (X, d) uno spazio metrico. Si definisca ora la seguente funzione su $X \times X$:

$$\widetilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \, .$$

Dimostrare che $(X, \widetilde{d})$ è uno spazio metrico limitato.