Foglio di esercizi 1

October 7, 2020

1) Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-n+n^2}{2n^2-n^{3/2}+1}$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{1+3^n}$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

f) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-n$

2) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni con le seguenti proprietà:

- $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e inoltre $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- $|b_n| < 1$

È vero o falso che esiste il limite $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$? Giustificare la risposta.

3) Sia q un numero reale e si consideri la successione $\{a_n\}$ definita per ricorrenza da $a_0 = 1$ e $a_n = \frac{q}{a_{n-1}}$ se $n > 0$. Per quali valori di q si ottiene che $\{a_n\}$ è convergente?

4) Dare un esempio di una successione convergente a 1 ma non definitivamente[1] monotona.

[1] Una proprietà $\mathcal{P}$ per una successione $\{a_n\}$ si dice *definitivamente vera* se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui $\mathcal{P}$ sia vera per ogni $n \geq \overline{n}$.