4. La distribuzione esponenziale

Abbiamo visto alcuni esempi di densità nel processo uniforme ed anche quella che studieremo in questo paragrafo viene, in un certo senso, da lì. Lo vedremo bene al capitolo IX. La presentiamo tuttavia adesso da un punto di vista fenomenologico, ricavandola cioè da una caratteristica tipica dei fenomeni fisici governati da questa legge di probabilità.

Supponiamo che si ottengano k croci in k lanci di una moneta. E' intuitivamente ovvio che al prossimo lancio la probabilità di avere testa è la stessa come nei casi precedenti: la moneta non ricorda ciò che è accaduto nel passato. Possiamo esprimere il fatto che la moneta non abbia memoria, in termini del tempo d'attesa W_1, come segue:

$$P(W_1 > k + n \mid W_1 > k) = P(W_1 > n).$$

La probabilità di ottenere una sequenza di $k + n$ croci, se già sono uscite k croci, è semplicemente la probabilità di ottenere le restanti n croci: quelle già uscite non contano. Il tempo che bisogna aspettare non dipende da quanto si è già atteso!

Nella realtà, se si sta aspettando il verificarsi di qualcosa che chiameremo «arrivo», non c'è alcuna astrazione nel pensare di lanciare una moneta a piccoli intervalli discreti di tempo e determinare quando l'arrivo si verifica. Per esempio, si potrebbe stare vicino a un contatore Geiger aspettando un segnale. Il tempo d'attesa in questo caso è *continuo*, ma come quello del processo di Bernoulli non ha memoria. Esprimiamo questo fatto mediante la probabilità condizionata.

Definizione. Si dice che la variabile aleatoria continua W possiede la *distribuzione esponenziale* quando $P(W \leqslant 0) = 0$ mentre per ogni t ed s positivi risulta

$$P(W > s + t \mid W > s) = P(W > t).$$

Chiameremo W *tempo d'attesa continuo senza memoria*, benché il valore di W non debba necessariamente essere un tempo.

L'ipotesi apparentemente innocua fatta per le variabili distribuite esponenzialmente individua la distribuzione di W a meno di un parametro. Questo fatto è sorprendente ma vediamo come si trova la distribuzione di W. La condizione che definisce una variabile esponenziale si può scrivere

$$P(W > s + t \cap W > s) = P(W > s)\, P(W > t),$$

Ma l'evento $(W > s + t)$ è contenuto in $(W > s)$ quindi

$$(W > s + t \cap W > s) = (W > s + t),$$

e perciò la condizione diventa $P(W > s + t) = P(W > s)\, P(W > t)$. Questa formula, una volta posto $G(t) = P(W > t)$, si scrive mediante la funzione G come segue

$$G(s + t) = G(s)\, G(t).$$

Da questa equazione soltanto possiamo dedurre che $G(t) = e^{-\alpha t}$ per una opportuna costante α positiva. Chi già conosce questo risultato analitico può tralasciare la dimostrazione che segue.

Si noti intanto che per $t = s = 0$ risulta $G(0) = G(0)^2$ e quindi $G(0) = 1$ per ovvie ragioni probabilistiche.

Se si passa alla funzione logaritmica abbiamo la relazione

$$\log G(s + t) = \log G(s) + \log G(t)$$

inoltre $G(t)$ è una funzione ovviamente decrescente.

Si deduce che $-\log G(t)$ è additiva e crescente, quindi deve essere $-\log G(t) = \alpha t$ per qualche costante α positiva, ovvero

$$G(t) = e^{-\alpha t}.$$

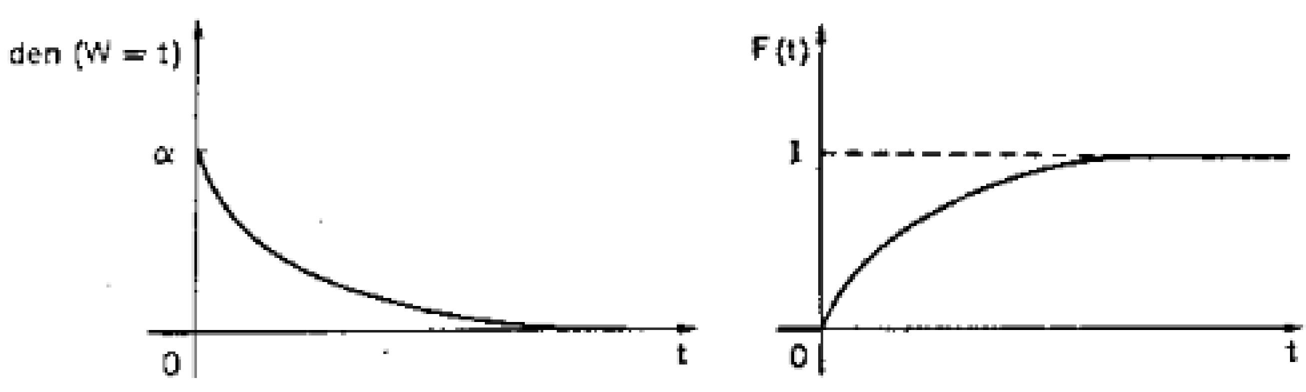
Concludiamo quindi che la distribuzione di probabilità di un tempo d'attesa W continuo senza memoria è

$$F(t) = P(W \leqslant t) = 1 - e^{-\alpha t} \qquad t > 0,\ \alpha > 0$$

mentre la sua densità è

$$\text{den}\,(W = t) = \alpha e^{-\alpha t}.$$

I grafici della distribuzione e della densità sono disegnati qui di seguito:



La densità e la distribuzione di un tempo di attesa nel continuo.

Sappiamo adesso perché W si dice distribuita esponenzialmente. Il parametro α si può interpretare come la *frequenza* degli arrivi nel tempo: infatti possiamo dire che «in media» accadono α arrivi per unità di tempo. Questo si può vedere facilmente calcolando la media di un tempo d'attesa esponenziale. Prima però ricordiamo una formula interessante ed utile per la media di variabili aleatorie continue positive, cioè tali che $P(X \leqslant 0) = 0$. Infatti la media di queste variabili si può trovare con la formula

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]\, dx$$

lasciata da dimostrare nell'esercizio 22.

Se W è una variabile distribuita esponenzialmente, la sua media vale pertanto

$$E(W) = \int_0^\infty [1 - F(t)]\, dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt$$

$$= \left[\frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\alpha}.$$

Questo risultato ci dà in effetti il significato della costante α che appare nella distribuzione di W. Su tali ed altri significati ritorneremo nel capitolo VIII.

La potenza del ragionamento probabilistico (fatto rigoroso con la probabilità condizionata) è che si può calcolare la distribuzione di una variabile aleatoria senza riferirsi ad uno spazio campione o ad eventi. La distribuzione è definita in termini fenomenologici, cioè soltanto in termini di fenomeni osservati.