

Traccia 4

Analisi Matematica.

- 1) Calcolare il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \log \left(\frac{x^2 \sin x}{2} + e^x \right)$$

- 2) Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, argomentando adeguatamente la risposta:

a) Se $\{a_n\}$ è una successione limitata¹, allora $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ è anch'essa una successione limitata.

b) Se $\{a_n\}$ è una successione a termini positivi limitata, allora $\left\{ \frac{1}{a_n+1} \right\}$ è anch'essa una successione limitata.

- 3) Sia f una funzione derivabile infinite volte nel suo dominio $D =]a, b[$. Sia $x_0 \in D$ un punto tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad \text{per un certo } k \in \mathbb{N}.$$

Se $f^{(2k)}(x_0) > 0$, cosa si può dire riguardo alla natura del punto stazionario x_0 ?
(Suggerimento: utilizzare lo sviluppo di Taylor per f intorno ad x_0 .)

- 4) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$. Inoltre calcolare l'area sottesa al grafico di f nell'intervallo $[0, 1]$.

Probabilità e Statistica

- 5) Si consideri un'urna che contiene una pallina che può essere bianca o rossa. Aggiungiamo una pallina rossa all'urna e mescoliamo, a questo punto estraiamo una pallina che risulta essere rossa. Qual è la probabilità che la pallina originariamente contenuta nell'urna (prima dell'aggiunta) sia rossa?

¹Per "limitata" si intende che la successione è limitata sia superiormente che inferiormente

6) Siano X e Y due variabili aleatorie continue. Esprimere la distribuzione F_Y in funzione della distribuzione F_X nei seguenti casi:

a) $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $Y = \sqrt{X}$, con l'ipotesi che $X \geq 0$.

c) $Y = |X|$.

7) Il numero medio di battiti cardiaci al minuto X per una certa popolazione è una variabile casuale normalmente distribuita con $\sigma^2(X) = 9$. Si estrae un campione casuale di $n = 100$ soggetti. Dal campionamento si ottiene il valore medio di 91 battiti. Trovare l'intervallo di confidenza al 95% per la media μ . Calcolare il medesimo intervallo nel caso in cui il campione sia di $n = 1000$ soggetti.