

Matematica e Statistica

IV Appello, 30/06/2022

Il tempo a disposizione è di 4 ore. È possibile usare una calcolatrice non programmabile. Non è consentito consultare testi o appunti. Giustificare quanto più possibile le risposte e scrivere anche svolgimenti parziali degli esercizi. Non verrà attribuito nessun punteggio numerico alla prova.

Nota. Si ricordi che il simbolo “log” indica il logaritmo in base e .

Analisi Matematica.

- 1) Calcolare, qualora esista, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^{2x} - 1}{3x}.$$

- 2) Studiare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{|x - 1|}$$

- 3) Determinare, qualora esistano, i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali per cui la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^n}$$

Per i valori trovati, calcolare la somma della serie.

- 4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \int_x^1 (x e^t dt) dx$$

Probabilità e Statistica

- 5) AirMango e RyanPear sono due compagnie aeree competitive sulla stessa rotta Venezia- Londra, entrambe con il medesimo orario di partenza. Si supponga che ogni giorno 500 passeggeri debbano andare da Venezia a Londra, e che ogni passeggero scelga a caso una delle due compagnie con probabilità $p = \frac{1}{2}$, indipendentemente dalla scelta degli altri passeggeri. AirMango ovviamente vuole far viaggiare il numero maggiore possibile di passeggeri. Ad esempio, essa potrebbe disporre di un aereo con 500 posti a sedere, ma ciò sarebbe economicamente svantaggioso, poichè ci si aspetta che sia difficile avere ogni giorno tutti e 500 passeggeri. Dunque AirMango opta per la costruzione di un aereo più piccolo, decidendo di essere disposta ad accettare fino al 4% di probabilità di avere passeggeri in overbooking¹. Quanti posti dovrà avere l'aereo di AirMango?

(Suggerimento: la scelta dell' i -esimo passeggero è una variabile aleatoria di Bernoulli X_i . Siamo interessati alla variabile aleatoria che descrive il numero totale di passeggeri sull'aereo.)

- 6) In un laghetto ci sono 10 pesci di cui 2 sono rossi.
- Si peschino a caso *senza ripetizione* 5 pesci. Qual è la probabilità di pescare un pesce rosso?
 - Si peschino a caso *con ripetizione* 5 pesci. Qual è la probabilità di pescare un pesce rosso?
- 7) Enunciare e discutere brevemente la legge dei grandi numeri.

¹Significa che 4% è la probabilità di rifiutare di imbarcare dei passeggeri poichè l'aereo è pieno.