

# Traccia 1

## Analisi Matematica.

- 1) Dare un esempio di un funzione  $f$  integrabile su un intervallo  $[a, b]$  tale per cui valga la relazione:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| < \int_a^b |f(x)| dx$$

- 2) Sia  $p$  un numero primo. Dimostrare che  $\sqrt{p}$  è un numero irrazionale.
- 3) Studiare il grafico della funzione:

$$f(x) = x(2 - x)e^{-x}.$$

Inoltre calcolare l'area sottesa al grafico di  $f$  nell'intervallo  $[0, 2]$ .

- 4) Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false, argomentando adeguatamente la risposta:
- a) Ogni successione strettamente crescente ha limite  $+\infty$ .
  - b) Esistono successioni che non sono strettamente crescenti definitivamente e che hanno limite  $+\infty$ .

## Probabilità e Statistica

- 5) La probabilità di ammalarsi in Italia di una certa malattia chiamata  $M20$  è di  $p = 10^{-3}$ . La malattia è totalmente asintomatica, ma è stato inventato un test che determina la presenza di  $M20$  nel corpo umano con una precisione del 95%. Lo stato Italiano decide di etichettare come malate (della malattia  $M20$ ) tutte le persone che risultino positive a 2 test. Se dopo uno screening di massa una persona viene considerata come "malata" dallo stato, qual è la probabilità che abbia realmente contratto la malattia  $M20$ ?
- 6) Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti e di parametro  $p$ . Si consideri la variabile aleatoria  $Z = X + Y$ . È vero o falso che  $X$  e  $Z$  sono indipendenti? Argomentare.

- 7) Siano  $X, Y, Z$  tre variabili aleatorie uniformi sull'intervallo  $[0, a]$  per  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ . Si assuma che le tre variabili siano indipendenti, dunque calcolare:

$$P(x < X \leq x + h, y < Y \leq y + h, z < Z \leq z + h)$$

per  $h > 0$  e  $x, y, z \in ]0, a - h[$ . Qual è il significato geometrico di tale risultato?