Sheet 2

April 15, 2021

4) Sia K un campo. Una *curva iperellittica di genere* $g \geq 1$ (su K) è una curva piana, affine, non singolare, definita dalla seguente equazione:

$$C\colon \quad Y^2 + h(X)Y = f(X) \tag{1}$$

dove $h(X), f(X) \in K[X]$ sono due polinomi tali che $\deg(h) \leq g$ e $\deg(f) = 2g+1$.

   a) Dimostrare che il polinomio di due variabili $Y^2 + h(X)Y - f(X) \in K[X,Y]$ è irriducibile su $\overline{K}$.

   b) Dimostrare che se $h(X) = 0$ allora $\mathrm{char}(K) \neq 2$

   c) Sia $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dimostrare che dopo una adeguata trasformazione di K^2 (non lineare), l'equazione (1) può essere scritta nella forma

$$C_0\colon \quad Y^2 = F(X) \tag{2}$$

   con $F(X) \in K[X]$ e $\deg(F) = 2g+1$. A questo punto discutere gli eventuali punti singolari della chiusura proiettiva $\widetilde{C_0}$.

   d) Si consideri il caso in cui $h(X) = 0$ e $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dimostrare che l'equazione (1) definisce una curva iperellittica se e solo se $f(X)$ non ha radici multiple nella chiusura algebrica $\overline{K}$.

   e) Mostrare che la trasformazione di K^2 data da $\iota : (x,y) \mapsto (x, -y-h(x))$ mappa la curva C in se stessa. Inoltre nel caso in cui $K = \mathbb{F}_{2^5}$, $h(X) = X^2 + X$, $f(X) = X^5 + X^3 + 1$, trovare almeno due punti fissi per ι.

5) Si consideri la seguente curva affine su $\mathbb{C}$:

$$C\colon \quad X^2(X-Y)(X+Y) + X^5 + 3Y^5 = 0$$

   a) Trovare i punti singolari della chiusura proiettiva $\widetilde{C}$.

   b) Dimostrare che $\widetilde{C}$ è una curva razionale.

6) Si consideri la seguente cubica affine su $\mathbb{C}$:

$$C\colon \quad X^3 + Y^3 + 1 = 0$$

Mostrare che la chiusura proiettiva $\widetilde{C}$ è non singolare. Si ponga $O = (1 : -1 : 0) \in \widetilde{C}$ e rispetto a tale scelta calcolare $-P$, per $P = (0 : 1 : -1) \in \widetilde{C}$.