

# Sheet 8

May 26, 2021

21) Sia  $X$  uno spazio topologico compatto, e sia  $K \subset X$  un sottoinsieme chiuso e discreto. Dimostrare che  $K$  è un insieme finito. Dimostrare o confutare la medesima asserzione nel caso in cui  $K$  sia solamente discreto (ma non necessariamente chiuso).

22) Uno spazio topologico  $X$  non vuoto si dice *irriducibile* se non può essere espresso come unione di due chiusi propri. Un sottoinsieme  $Y$  di  $X$  è detto irriducibile se è irriducibile rispetto alla topologia indotta da  $X$ .

Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $X$  è uno spazio topologico irriducibile
- (ii) L'intersezione di due aperti non vuoti di  $X$  è sempre non vuota.
- (iii) Ogni aperto non vuoto di  $X$  è denso in  $X$ .
- (iv) Ogni aperto non vuoto di  $X$  è connesso.
- (v) Ogni aperto non vuoto di  $X$  è irriducibile.

Dimostrare inoltre che se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione continua fra due spazi topologici e  $Z \subseteq X$  è un sottoinsieme irriducibile, allora  $f(Z)$  è irriducibile.

23) Uno spazio topologico non vuoto  $X$  si dice Noetheriano se ogni catena discendente di chiusi  $X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \dots$  si stabilizza.

Fare un esempio di uno spazio topologico non Noetheriano. Sia inoltre  $X$  uno spazio topologico Noetheriano, dimostrare le seguenti affermazioni:

- (a) Ogni sottospazio di  $X$  (i.e. ogni sottoinsieme con la topologia indotta da  $X$ ) è Noetheriano.
- (b) Ogni aperto di  $X$  è compatto.

24) Sia  $X$  un insieme. Si verifichi che la famiglia di sottoinsiemi

$$\tau_0 := \{\emptyset\} \cup \{S \subseteq X : X \setminus S \text{ è numerabile}\}$$

definisce un topologia su  $X$ . È vero o falso che  $[0, 1]$  è un compatto di  $(\mathbb{R}, \tau_0)$ ?