Sheet 1

April 7, 2021

1) Si consideri la curva piana affine C su un campo algebricamente chiuso K, descritta dall'equazione $Y^2 = f(X)$, dove f è un polinomio monico di terzo grado senza radici multiple.

   a) Verificare che il punto del piano proiettivo $O = (0 : 1 : 0)$ appartiene alla chiusura proiettiva $\widetilde{C}$ della curva C. Inoltre verificare che O è un flesso.

   b) Sia $f(X) = X^3 + 4X$ e sia $K = \mathbb{C}$. Dimostrare che la tangente a $\widetilde{C}$ nel punto $Q = (2 : 4 : 1)$ passa per $A = (0 : 0 : 1)$. Si consideri l'operazione su $\widetilde{C}$ indotta dalla scelta di O e dimostrare che Q è un punto di 4-torsione (ovvero $4Q = 0$).

2) Trovare i punti singolari della sestica di Cayley, che è la curva proiettiva su $\mathbb{C}$ data dall'equazione:

$$4(X^2 + Y^2 - XZ)^3 = 27Z^2(X^2 + Y^2)^2$$

3) Sia C una curva piana su $K = \mathbb{F}_{31}$, descritta dall'equazione

$$Y^2 = X^3 + 11X + 3\,.$$

Nella chiusura proiettiva $\widetilde{C}$ si considerino i punti $P = (2 : -8 : 1)$ e $Q = (16 : 11 : 1)$. Si ponga O uguale al punto all'infinito di $\widetilde{C}$; rispetto a tale scelta, calcolare $2P + Q$.