

# Foglio di esercizi 4

October 25, 2020

Gli esercizi segnalati con “\*” sono più difficili.

1) Calcolare il dominio delle seguenti funzioni

a)  $\log(\log(\log x))$

b)  $\sqrt{x - \sqrt{x}}$

2) Rispondere, giustificando i passaggi, alle seguenti richieste:

a) Si dimostri che una successione  $\{x_n\}_n$  converge a 0 se e solo se  $\{|x_n|\}_n$  converge a 0.

b) Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si dimostri che  $f$  è continua in 0. [Sugg: utilizzare a)].

c)\* Si dimostri che la funzione  $f$  definita in b) non è continua in ogni punto di  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

3)\* Sia  $\{x_n\}_n$  una successione tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty$ . Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

[Sugg: per ogni  $x_n$  considerare la parte intera  $\lfloor x_n \rfloor$  e ricondursi al limite fondamentale che definisce  $e$ .]

4) Calcolare, quando esistono, i seguenti limiti (giustificare le affermazioni):

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log(\sqrt{x})$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(1-x)}$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 e^x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \log x \cdot \sin x$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{2 \log x}$$