Connessioni su varietà lisce

Paolo Dolce

19 novembre 2013

Notazioni

Innanzitutto verrà utilizzata pesantemente la notazione di Einstein per le sommatorie: in tutte le formule in cui appare uno stesso indice due volte, una volta come pedice ed una volta come apice, è intesa una sommatoria su quell'indice; inoltre il dominio di tale indice è sempre sottinteso. In uno spazio vettoriale V gli elementi di una base ordinata sono sempre indicizzati mediante dei pedici, mentre per le componenti dei vettori si usano gli apici (per lo spazio vettoriale duale V^* la notazione è invertita). Ad esempio se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di V, per ogni $v \in V$, nelle notazioni tradizionali si ha

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

mentre con la notazione di Einstein si scriverà semplicemente $v = v^i e_i$. Si adotteranno inoltre le seguenti convenzioni:

- La lettera M è sempre usata per indicare una varietà liscia n-dimensionale.
- Se $p \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbb{R}^n_p$ si indica lo spazio vettoriale $\{p\} \times \mathbb{R}^n$.
- Lo spazio tangente T_pM è lo spazio vettoriale delle derivazioni in p.
- Se f è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, allora la sua derivata si indica con $\dot{f}$.
- Se F è una funzione tra due varietà lisce, allora la sua rappresentazione in coordinate è denotata con $\widehat{F}$. Nel caso particolare in cui γ è una curva a valori su una varietà M, la sua rappresentazione in coordinate è indicata con $\widehat{\gamma} = (\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$.
- Per fibrato vettoriale su M si intende sempre un fibrato vettoriale liscio.
- Se Y è una sezione di un fibrato vettoriale (o a maggior ragione un campo vettoriale), allora il valore di Y in $p \in M$ è denotato con Y_p. In alcuni casi per evitare confusioni con eventuali indici o pedici presenti si scriverà $Y|_p$. Il significato di tale notazione sarà chiaro dal contesto.
- Se (U, φ) è un carta di M che contiene p, allora $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p := \varphi_*^{-1}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}\right)$ dove $\varphi_* = d\varphi_p$ è il pushforward (o differenziale) in p di φ; inoltre $\frac{\partial}{\partial x^i}$ è il campo vettoriale definito su U tale che $p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.
- T_pM è sempre identificato con l'immagine della mappa iniettiva

$$\begin{aligned} \iota : T_pM &\longrightarrow TM \\ v &\longmapsto (p, v) \end{aligned}$$

  Tale immagine è chiaramente $\{p\} \times T_pM$.
- Si dà infine per scontata l'esistenza della partizione liscia dell'unità su M e dunque l'esistenza delle funzioni bump lisce. Per maggiori informazioni su tali concetti si veda [Jo.Lee1, chapter 2].

Indice

1 Introduzione

Si consideri un campo vettoriale Y in $\mathbb{R}^n$, allora fissato un certo vettore $v \in \mathbb{R}^n$, la derivata direzionale di Y lungo la direzione v calcolata in $p \in \mathbb{R}^n$ è definita come:

$$\lim_{h \to 0} \frac{Y_{p+hv} - Y_p}{h} \tag{1}$$

La differenza $Y_{p+hv} - Y_p$ formalmente non ha alcun senso poichè Y_{p+hv} e Y_p appartengono a due spazi vettoriali diversi, ma fortunatamente vale la seguente catena di isomorfismi naturali

$$T_{p+hv}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n_{p+hv} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n_p \cong T_p\mathbb{R}^n$$

In pratica, dal momento che tutti gli spazi tangenti di $\mathbb{R}^n$ si identificano in modo naturale con $\mathbb{R}^n$ stesso, è possibile trattare Y_{p+hv} e Y_p come semplici vettori di $\mathbb{R}^n$. Il risultato dell'equazione 1, una volta avvenuta la suddetta identificazione, è dunque un vettore che in ogni componente di indice i possiede la derivata direzionale lungo v, calcolata in p, della funzione a valori reali Y^i.
Se M è però una varietà liscia astratta e Y è un campo vettoriale, non è possibile utilizzare l'equazione 1 per estendere il concetto di derivata direzionale, infatti si presentano i seguenti problemi:

i) Non si riesce immediatamente ad individuare su M il punto $p + hv$, ovvero in una varietà astratta non è ben chiaro cosa voglia dire considerare un punto p' molto vicino a p lungo una certa direzione fissata. Oltretutto M non ha alcuna struttura di spazio affine, dunque i punti della varietà non possono essere sommati tra di loro.

ii) Pur riuscendo ad individuare il punto $p' := p + hv$, affinchè si ottenga una definizione sensata di derivata direzionale, deve essere necessariamente $p' \neq p$. In tal caso $Y_{p'} \in T_{p'}M$ e $Y_p \in T_pM$, perciò non ha alcun senso scrivere $Y_{p'} - Y_p$. In generale, tra le fibre di un fibrato vettoriale c'è un isomorfismo non naturale, quindi non si può adottare lo stesso stratagemma utilizzato per $\mathbb{R}^n$, ovvero quello di "trasportare", tramite ismomorfismi naturali, $Y_{p'}$ e Y_p in uno spazio vettoriale comune per poi effettuare i conti. In linea di principio, se $\phi : T_{p'}M \to T_pM$ è un isomorfismo non naturale, un "trasporto" è comunque possibile, infatti si potrebbe effettuare, ad esempio, la differenza $\phi(Y_{p'}) - Y_p$. Il problema è che, la non naturalità di ϕ implica che tutti gli oggetti matematici definiti tramite ϕ stessa dipendono pesantemente dalla scelta delle basi su $T_{p'}M$ e su T_pM. In pratica non si avrebbe una definizione intrinseca di derivata direzionale e questo andrebbe contro lo spirito della geometria differenziale.

Gli stessi problemi si pongono in generale per qualsiasi sezione di un fibrato vettoriale, e dunque non solo per i campi vettoriali. L'obiettivo quindi è quello di definire una derivata direzionale intrinseca per le sezioni globali di un fibrato vettoriale, ovvero tale che abbia senso anche nel caso di una generica varietà liscia M e inoltre tale che coincida con i concetti classici dell'analisi vettoriale su $\mathbb{R}^n$. Ciò verrà fatto inizialmente in modo abbastanza astratto, ma in seguito si vedrà come alla fine può tutto essere ricondotto al limite di un particolare rapporto incrementale.

2 Connessioni di Koszul

Sia (E, M, π) un fibrato vettoriale reale di rango k su M e sia $\mathcal{E}(M)$ l'insieme di tutte le sezioni globali lisce su E. Si ricordi che $\mathcal{E}(M)$ è uno spazio vettoriale reale su $\mathbb{R}$ ma ha anche una struttura di $C^\infty(M)$-modulo mediante la moltiplicazione $(f, Y) \longrightarrow fY$ tale per cui $(fY)|_p := f(p)Y_p$. A maggior ragione l'insieme dei campi vettoriali lisci su M, indicato con $\mathcal{T}(M)$, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ oltre che un $C^\infty(M)$-modulo. Si ricordi inoltre che dato un campo vettoriale $X \in \mathcal{T}(M)$ ed una funzione $f \in C^\infty(M)$ è possibile definire un'ulteriore funzione:

$$\begin{aligned} Xf : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto X_p f \end{aligned}$$

per cui vale che Xf è liscia se e solo se X è un campo vettoriale liscio. Ha dunque senso la seguente definizione.

Definizione 2.1. Sia (E, M, π) un fibrato vettoriale reale di rango k su M, allora una *connessione di Koszul* (o più semplicemente una *connessiome*) su M rispetto al fibrato (E, M, π) è una mappa

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) &\longrightarrow \mathcal{E}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

che possiede le seguenti proprietà:

i) Linearità rispetto alla prima variabile su $C^\infty(M)$:

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \quad \text{per ogni } f, g \in C^\infty(M)$$

ii) Linearità rispetto alla seconda variabile su $\mathbb{R}$:

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R}$$

iii) Regola del prodotto di Leibniz:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \text{per ogni } f \in C^\infty(M)$$

Una sezione del tipo $\nabla_X Y$ è detta *derivata covariante* di Y nella direzione X.

Si faccia attenzione che se $\nabla^{(1)}, \ldots, \nabla^{(m)}$ sono delle connessioni diverse, non è detto che $a_1\nabla^{(1)} + \ldots + a_m\nabla^{(m)}$ sia ancora una connessione. Valgono sempre le prime due proprietà di linearità, ma non è detto che sia soddisfatta la regola del prodotto di Leibniz, infatti ad esempio:

$$\left(\nabla_X^{(1)} + \nabla_X^{(2)}\right)(fY) = f\nabla_X^{(1)} Y + (Xf)Y + f\nabla_X^{(2)} Y + (Xf)Y =$$

$$= f\left(\nabla_X^{(1)} + \nabla_X^{(2)}\right) Y + 2(Xf)Y \neq f\left(\nabla_X^{(1)} + \nabla_X^{(2)}\right) Y + (Xf)Y$$

Nonostante che il valore di una derivata covariante in un dato punto p dipenda formalmente da due sezioni definite globalmente su tutta la varietà M, il prossimo lemma mostra che, in realtà, $\nabla_X Y|_p$ dipende solamente dal comportamento di X e Y in un intorno aperto di p.

Lemma 2.2. *Sia ∇ una connessione su M, e siano inoltre U e V due intorni aperti di un punto $p \in M$. Se $X, \widetilde{X} \in \mathcal{T}(M)$ e $Y, \widetilde{Y} \in \mathcal{E}(M)$ sono tali che $X = \widetilde{X}$ su U e $Y = \widetilde{Y}$ su V, allora si ha*

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p$$

Dimostrazione. Si consideri la sezione $\overline{Y} = Y - \widetilde{Y}$, allora per ipotesi si ha che $\overline{Y}$ è la funzione nulla su V. Sia ora φ una funzione bump liscia definita su un chiuso contenente p e supportata in V, allora per definizione si ha che $\varphi(p) = 1$ e inoltre $\varphi\overline{Y} = 0$. Per la linearità rispetto alla seconda variabile si ha che $\nabla_X(\varphi\overline{Y}) = 0$, ma per la regola del prodotto di Leibniz

$$0 = \nabla_X \left(\varphi\overline{Y}\right) = \varphi\nabla_X\overline{Y} + (X\varphi)\,\overline{Y} \tag{2}$$

Ora chiaramente $(X\varphi)\,\overline{Y} = 0$ poichè $\overline{Y}$ si annulla su V, mentre $X\varphi = 0$ su $M \setminus V$[1]. In definitiva l'equazione 2 diventa $0 = \varphi\nabla_X\overline{Y}$, inoltre valutando in p si ha

$$0 = \varphi(p)\nabla_X\overline{Y}|_p = \nabla_X\overline{Y}|_p$$

ovvero ancora una volta per linearità

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_X \widetilde{Y}|_p$$

In maniera simile a quanto fatto in precedenza si ponga ora $\overline{X} = X - \widetilde{X}$, allora $\overline{X}$ si annulla su U. Sia ψ una funzione bump liscia su un chiuso contenente p e supportata in U, dunque $\psi\overline{X} = 0$, e per linearità della connessione vale che

$$0 = \nabla_{\psi\overline{X}} Y = \psi\nabla_{\overline{X}} Y \tag{3}$$

Valutando l'equazione 3 in p si ottiene

$$0 = \psi(p)\nabla_{\overline{X}} Y|_p = \nabla_{\overline{X}} Y|_p$$

ovvero

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} Y|_p$$

Unendo infine i risultati ottenuti si ha la tesi:

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_X \widetilde{Y}|_p = \nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p$$

□

Si può ancora raffinare quanto appena detto mostrando che $\nabla_X Y|_p$ dipende solamente da Y "in modo locale", e da X_p.

Lemma 2.3. *Sia ∇ una connessione su M, e siano inoltre $X, \widetilde{X} \in \mathcal{T}(M)$ tali che $X_p = \widetilde{X}_p$. Allora per ogni $Y \in \mathcal{E}(M)$ vale che $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} Y|_p$.*

[1] Se $q \in M \setminus V$, allora $X_q\varphi = 0$ visto che X_p è un operatore locale e φ coincide su $M \setminus V$ con la funzione costantemente nulla.

Dimostrazione. Si ponga $\overline{X} = X - \widetilde{X}$ e sia inoltre U un dominio di una carta contenente p, dunque su U vale che $\overline{X} = \overline{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sia C un chiuso di M tale che $C \subseteq U$, allora se ψ è la funzione bump liscia per C supportata in U, si definiscano $G_i \in \mathcal{T}(M)$ e $g^i \in C^\infty(M)$ nel modo seguente

$$G_i = \begin{cases} \psi \frac{\partial}{\partial x^i} & \text{su } U \\ \\ 0 & \text{su } M \setminus U \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} \psi \overline{X}^i & \text{su } U \\ \\ 0 & \text{su } M \setminus U \end{cases}$$

Chiaramente $g^i G_i = \overline{X}$ su C dunque per il lemma 2 e per linearità rispetto alla prima variabile si ha

$$\nabla_{\overline{X}} Y|_p = \nabla_{g^i G_i} Y|_p = g^i(p) \left(\nabla_{G_i} Y\right)|_p = \overline{X}^i(p) \left(\nabla_{G_i} Y\right)|_p \tag{4}$$

Ma se per ipotesi vale che

$$0 = \overline{X}_p = \overline{X}^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

allora deve essere necessariamente $\overline{X}^i(p) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dall'equazione 4 segue dunque che

$$\nabla_{\overline{X}} Y|_p = \overline{X}^i(p) \left(\nabla_{G_i} Y\right)|_p = 0$$

ovvero

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} Y|_p$$

□

Per rimarcare quanto affermato dal lemma precedente, d'ora in poi si scriverà $\nabla_{X_p} Y$ invece che $\nabla_X Y|_p$.

3 Connessioni lineari

Da questo momento in poi si concentrerà l'attenzione esclusivamente sul fibrato tangente poichè le connessioni rispetto ad esso sono particolarmente utili ed interessanti. In ogni caso quasi tutti lemmi e i teoremi che saranno presentati di seguito possono essere estesi per un generico fibrato vettoriale senza alcuna modifica delle dimostrazioni.
Una connessione ∇ su M rispetto al fibrato tangente TM è detta *connessione lineare*; sostanzialmente è una funzione

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$$

che rispetta le tre proprietà della definizione 2.1, dunque se $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ allora $\nabla_X Y$ è la derivata covariante lungo la direzione X del campo vettoriale Y.

Se $Y \in \mathcal{T}(M)$ ed $\{E_i\}$ è un frame locale su un aperto U, allora, sempre su U si può scrivere

$$Y = Y^i E_i \quad \text{con} \ \ Y^i \in C^\infty(U)$$

Ogni aperto $U \subseteq M$ può essere dotato di una struttura di sottovarietà integrata, dunque è possibile definire connessioni lineari per TU. Per ogni scelta di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ovviamente $\nabla_{E_i} E_j \in \mathcal{T}(U)$ e in particolare si scrive

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k \quad \text{con} \ \ \Gamma^k_{ij} \in C^\infty(U)$$

I simboli Γ^k_{ij} sono detti *simboli di Christoffel* rispetto al frame $\{E_i\}$, ed indicano esattamente n^3 funzioni lisce da U in $\mathbb{R}$. Come conseguenza del prossimo lemma si vedrà che i simboli di Christoffel determinano univocamente una connessione lineare.

Lemma 3.1. *Sia ∇ una connessione lineare su un aperto U di M e siano $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Se su U è definito un frame liscio (locale) $\{E_i\}$, tale che $X = X^i E_i$ ed $Y = Y^j E_j$, allora su U si ha*[2]

$$\nabla_X Y = \left(X^i Y^j \Gamma^k_{ij} + X Y^k \right) E_k$$

Dimostrazione. È una semplice applicazione delle proprietà elencate nella definizione 2.1:

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j E_j) = Y^j \nabla_X E_j + (XY^j) E_j = Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j + (XY^j) E_j =$$

$$= X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j + (XY^j) E_j = X^i Y^j \Gamma^k_{ij} E_k + (XY^j) E_j = \left(X^i Y^j \Gamma^k_{ij} + XY^k \right) E_k$$

Nell'ultima uguagliaza c'è chiaramente un indice muto j che diventa k. □

Di seguito un importante esempio di connessione lineare:

Esempio 3.2 (Connessione euclidea)**.** Sia M una varietà liscia ricoperta da una sola carta e sia $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \ : \ i = 1, \dots, n \right\}$ il frame coordinato globale, allora si ponga

$$\overline{\nabla}_X Y = (XY^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Innanzitutto bisogna provare che $\overline{\nabla}$ definisce una connessione lineare:

i)

$$\overline{\nabla}_{fX_1 + gX_2} Y = \left((fX_1 + gX_2) Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} =$$

$$= f \left(X_1 Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + g \left(X_2 Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = f \overline{\nabla}_{X_1} Y + g \overline{\nabla}_{X_2} Y$$

ii)

$$\overline{\nabla}_X \left(aY_1 + bY_2 \right) = \left(X(aY_1^j + bY_2^j) \right) \frac{\partial}{\partial x^j} =$$

$$= a \left(XY_1^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + b \left(XY_2^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = a \overline{\nabla}_X Y_1 + b \overline{\nabla}_X Y_2$$

[2] Si ricordi che ha senso restringere campi vettoriali globali su un aperto $U \subseteq M$, poichè $T_p U$ è naturalmente isomorfo a $T_p M$

iii)

$$\overline{\nabla}_X(fY) = \left(X\left(fY^j\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = f\left(XY^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\left(Xf\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = f\overline{\nabla}_X Y + (Xf)Y$$

La connessione $\overline{\nabla}$ è detta *euclidea* e si noti che per il lemma 3.1 i simboli di Christoffel ad essa associati rispetto al frame coordinato sono tutti nulli. Se p è un generico punto di M allora

$$\overline{\nabla}_{X_p} Y = (X_p Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p$$

ovvero nel caso caso in cui $M = \mathbb{R}^n$, la derivata covariante di Y nella direzione X_p è il campo vettoriale che in ogni componente j possiede la derivata direzionale lungo X_p della funzione Y^j. In sostanza questo esempio mostra che in $\mathbb{R}^n$ la derivata covariante coincide con la nozione "standard" di derivata di un campo vettoriale.

Restringendosi sempre al caso in cui M è ricoperto da una sola carta, la connessione euclidea non è l'unica connessione lineare ammissibile, ma ce ne sono tante altre quanti sono i simboli di Christoffel:

Lemma 3.3. *Sia M una varietà liscia ricoperta da una sola carta, allora esiste una biiezione tra l'insieme di tutte le connessioni lineari su M e l'insieme di tutte le possibili scelte delle n^3 funzioni $\{\Gamma^k_{ij}\}$.*

Dimostrazione. Sia ∇ una connessione lineare, allora per il lemma 3.1

$$\nabla_X Y = \left(X^i Y^j \Gamma^k_{ij} + XY^k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5}$$

dunque è ben definita una mappa $\nabla \longmapsto \{\Gamma^k_{ij}\}$. Viceversa date n^3 funzioni lisce $\{\Gamma^k_{ij}\}$ a valori in $\mathbb{R}$, si associ ad esse la funzione ∇ definita come nell'equazione 5. Si verifica molto facilmente (in modo simile a quanto fatto nell'esempio 3.2) che ∇ è una connessione lineare, dunque la dimostrazione è completa. □

Fino ad ora ci si è concentrati sulla descrizione delle proprietà possedute dalle connessioni lineari, ma non è stato detto nulla riguardo la loro esistenza. In realtà si è visto che per le varietà che possono essere ricoperte da una sola carta esistono tante connessioni lineari, dunque l'intuizione porta a pensare che anche per una generica varietà esistono sempre tante connessioni lineari.

Teorema 3.4 (Esistenza delle connessioni lineari)**.** *Ogni varietà liscia ammette almeno una connessione lineare.*

Dimostrazione. Sia M una varietà liscia e sia inoltre $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una struttura differenziabile su M. Chiaramente ogni aperto $\mathcal{U}_\alpha$ è una varietà liscia ricoperta da una singola carta φ_α, dunque per il lemma 3.3 esiste almeno una connessione lineare ∇^α su $\mathcal{U}_\alpha$. Sia ora $\{\psi_\alpha\}$ la partizione dell'unità liscia relativa al ricoprimento $\{U_\alpha\}$, allora si pone per definizione

$$\nabla_X Y := \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y$$

Si vuole provare che quella appena definita è una connessione lineare, dunque basta verificare la validità della regola del prodotto di Leibniz:

$$\nabla_X(fY) = \psi_\alpha \nabla^\alpha_X(fY) = f\psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y + \sum_\alpha \psi_\alpha (Xf)Y =$$

$$= f\psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y + (Xf)Y = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

□

In sostanza l'idea di fondo della dimostrazione è stata quella di incollare insieme diverse connessioni lineari ∇^α definite localmente, in un'unica connessione lineare ∇. Fissato un atlante $\mathcal{A}$ su M, per lemma 3.3 tali ∇^α sono in biiezione con la scelta dei simboli di Christoffel, dunque questi ultimi in un certo senso determinano univocamente la connessione lineare ∇ su M. Se ∇ è una connessione lineare definita su tutto M, ci si chiede se essa induce una connessione lineare su un aperto $U \subseteq M$:

Lemma 3.5. *Sia ∇ una connessione lineare su M, allora esiste una connessione ∇^U su U tale che per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ $\nabla^U_{X|_U} Y|_U = (\nabla_X Y)\big|_U$. (In questo caso la sbarra verticale indica proprio la restrizione funzionale all'aperto U)*

Dimostrazione. Sia $X \in \mathcal{T}(U)$, e sia V un dominio di una carta di U che contiene un punto fissato p, chiaramente vale che $V \subseteq U$. È possibile allora considerare un chiuso $C \subseteq V$ contenente p ed una funzione bump ψ supportata in V tale che $\psi(C) = 1$. Si definisce allora il seguente campo vettoriale $\widetilde{X} \in \mathcal{T}(M)$:

$$\widetilde{X} = \begin{cases} \psi X & \text{su } V \\ 0 & \text{su } M \setminus V \end{cases}$$

e ovviamente vale che $X = \widetilde{X}$ su C. Ora se $X, Y \in \mathcal{T}(U)$, si costruiscano i campi vettoriali $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{T}(M)$ come mostrato sopra, e per ogni $p \in U$ si ponga:

$$\nabla^U_{X_p} Y := \nabla_{\widetilde{X}_p} \widetilde{Y}$$

In tal modo è ben definita una connessione lineare che risulta indipendente dalla scelta di $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ per via del lemma 2.2. □

∇^U è detta *connessione lineare* indotta da ∇ su U, inoltre nel seguito, quando è chiaro dal contesto, verrà sempre omesso l'apice per fare riferimento ad essa. È infatti evidente che se ∇ è una connessione lineare su M e $X, Y \in \mathcal{T}(U)$, allora l'unico modo per dare senso all'espressione $\nabla_X Y$ è utilizzare la connessione lineare indotta su U.

4 Campi vettoriali lungo una curva

In questa sezione si studieranno le proprietà fondamentali dei campi vettoriali lisci lungo curve. Si ricordi che una curva su M è una mappa continua $\gamma : I \to M$, dove I è un intervallo reale. Per comodità si può sempre supporre che I sia un intervallo aperto, poichè se fosse chiuso (o semichiuso) si può definire γ su un aperto che contiene I e in seguito restringere la funzione.

Definizione 4.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia su M, allora una mappa liscia $V : I \longrightarrow TM$ tale che $V(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ è un *campo vettoriale liscio lungo* γ.

L'insieme dei campi vettoriali lisci lungo una curva γ si indica con $\mathcal{T}(\gamma)$ e si verifica che tale insieme è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ oltre che un $C^\infty(I)$-modulo. Dalla definizione precedente si nota che V non è proprio un campo vettoriale su M, poichè il suo dominio non è M, tuttavia a volte ad esso può essere associato un campo vettoriale su un aperto di M:

Definizione 4.2. Sia V un campo vettoriale liscio lungo $\gamma : I \longrightarrow M$, allora V si dice *estendibile* se esiste un campo vettoriale liscio $\widetilde{V}$ definito su un aperto che contiene $\gamma(I)$, tale che

$$V(t_0) = \widetilde{V}_{\gamma(t_0)} \quad \forall t_0 \in I$$

Esempio 4.3. Sia $U \subseteq M$ il dominio di qualche carta e sia $\gamma : I \longrightarrow U$ una curva liscia. Un campo vettoriale liscio lungo γ che è anche estendibile è il seguente

$$\begin{array}{rcl} \partial_i : I & \longrightarrow & TU \\ t & \longmapsto & \left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)} \end{array}$$

Esso è liscio poichè $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \gamma$ e inoltre la sua estensione è chiaramente $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

In virtù dell'esempio precedente, anche per i campi vettoriali lungo curve esiste una scrittura locale molto comoda. Sia infatti V un campo vettoriale lungo γ, e sia inoltre U il dominio di una carta, allora su $\gamma^{-1}(U)$ si ha che

$$V = V^i \partial_i \tag{6}$$

dove $V^i : \gamma^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ e si presti attenzione al fatto che l'equazione 6 è ben diversa dall'uguaglianza $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Lemma 4.4. *Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia e sia inoltre V un campo vettoriale lungo γ. Se (U, ψ) è una carta di M e su I vale che*

$$V(t) = V^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)}$$

allora V è liscio su $\gamma^{-1}(U)$ se e solo se ogni funzione V^i è liscia.

Dimostrazione. La rappresentazione locale di V in coordinate è la seguente:

$$\begin{aligned} \widehat{V}(t) &= \psi(V(t)) = \big(\psi^1(\gamma(t)), \dots, \psi^n(\gamma(t)), V^1(t), \dots, V^n(t)\big) = \\ &= \big(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t), V^1(t), \dots, V^n(t)\big) \end{aligned}$$

Siccome γ è liscia, risulta evidente che $\widehat{V}(t)$ è liscia se e solo se lo sono tutte le componenti V^i. $\square$

Di seguito l'esempio più importante di un campo vettoriale lungo una curva:

Esempio 4.5 (campo vettoriale velocità di una curva)**.** Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia, e si consideri

$$\begin{aligned} \gamma' : I &\longrightarrow TM \\ t_0 &\longmapsto \gamma'(t_0) := \gamma_* \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \right) \end{aligned}$$

È noto che nel dominio di ogni carta intersecata da $\gamma(I)$ vale

$$\gamma'(t_0) = \dot{\gamma}^i(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t_0)}$$

dunque dal lemma 4.4 segue che γ' è un campo vettoriale liscio lungo γ. Si noti che in generale γ' non è estendibile, infatti se ad esempio esistono due punti $t_0, t_1 \in I$ distinti tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \gamma'(t_1)$, allora si ha

$$\widetilde{\gamma'}_{\gamma(t_0)} = \gamma'(t_0) \neq \gamma'(t_1) = \widetilde{\gamma'}_{\gamma(t_1)}$$

dunque in tal caso non si può avere un campo vettoriale $\widetilde{\gamma'}$ ben definito.

5 Derivata covariante lungo una curva liscia

A questo punto grazie al concetto di connessione è possibile introdurre la derivata covariante lungo una curva:

Definizione 5.1. Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una curva liscia e sia inoltre ∇ una connessione lineare su M, allora una *derivata covarinte lungo gamma* rispetto a ∇ è una funzione

$$\begin{aligned} D_t : \mathcal{T}(\gamma) &\longrightarrow \mathcal{T}(\gamma) \\ V &\longmapsto D_t V \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

i) Linearità su $\mathbb{R}$:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{R}$$

ii) Regola del prodotto di Leibniz:

$$D_t(fV) = fD_tV + \dot{f}V \quad \text{per ogni } f \in C^\infty(I)$$

iii) Se V è estendibile al campo vettoriale liscio $\widetilde{V}$, allora

$$D_tV(t_0) = \nabla_{X_{\gamma(t_0)}} \widetilde{V}$$

dove X è un campo vettoriale tale che $X_{\gamma(t_0)} = \gamma'(t_0)$.

Come nel caso delle connessioni lineari si prova che in realtà la derivata covariante è un "operatore locale", poichè $D_tV(t_0)$ dipende solo dal comportamento di V vicino a t_0.

Lemma 5.2. *Sia γ una curva liscia fissata e siano inoltre $V, W \in \mathcal{T}(\gamma)$, allora se $V = W$ su $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, allora $D_t V(t_0) = D_t W(t_0)$ (rispetto a qualsiasi connessione lineare ∇ fissata).*

Dimostrazione. Si ponga $Z = V - W$, allora $Z = 0$ su $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. Sia ora φ una funzione bump liscia supportata in $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ tale che $\varphi(t_0) = 1$, dunque in analogia alle osservazioni fatte per il lemma 2.2, si ha

$$0 = D_t(\varphi Z) = \varphi D_t Z + \dot{\varphi} Z = \varphi D_t Z$$

ovvero $0 = \varphi(t_0) D_t Z(t_0) = D_t Z(t_0)$ da cui segue che $D_t V(t_0) = D_t W(t_0)$. □

In precedenza si è visto che ogni varietà liscia ammette tante connessioni lineari, questo come vedremo non è vero per le derivate covarianti lungo curve, poichè, fissata una connessione lineare su M ed una curva γ esiste solamente una sola derivata covariante lungo γ. Si esamina innanzitutto il caso in cui M può essere ricoperto da una singola carta.

Lemma 5.3. *Sia ∇ una connessione lineare su M e sia U il dominio di una carta che ricopre M, allora per ogni curva liscia $\gamma : I \longrightarrow M$ esiste un'unica derivata covariante lungo γ rispetto a ∇.*

Dimostrazione. Si prova prima di tutto l'unicità. Sia $D_t : \mathcal{T}(\gamma) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma)$ una derivata covariante, e sia $V \in \mathcal{T}(\gamma)$; dato che esiste una carta che ricopre la varietà globalmente su tutto I vale

$$V = V^j \partial_j$$

Ma ∂_j è estendibile, quindi per ogni $t_0 \in I$

$$V^j(t_0) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} = \widetilde{V}^j(\gamma(t_0)) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)}$$

da cui $V^j(t_0) = V^j(\gamma(t_0))$. Ora per le proprietà *i*), *ii*) e *iii*) della definizione 5.1 si ha la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
D_t V(t_0) &= \nabla_{X_{\gamma(t_0)}} \widetilde{V} \\
&= \dot{\gamma}^i(t_0) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \widetilde{V} \right)\bigg|_{\gamma(t_0)} = \dot{\gamma}^i(t_0) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\widetilde{V}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)\bigg|_{\gamma(t_0)} = \\
&= \dot{\gamma}^i(t_0) \left(\widetilde{V}^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)\bigg|_{\gamma(t_0)} + \dot{\gamma}^i(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\gamma(t_0)} \widetilde{V}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} = \\
&= \dot{\gamma}^i(t_0) \widetilde{V}^j(\gamma(t_0)) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0)) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)} + \frac{d(V^j \circ \gamma)}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} = \\
&= \dot{\gamma}^i(t_0) V^j(t_0) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0)) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)} + \dot{V}^j(t_0) \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} = \\
&= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0)) \right) \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)}
\end{aligned}$$

Questo prova che se esiste una derivata covariante D_t lungo γ allora deve essere necessariamente

$$\begin{aligned} D_t V(t_0) &= \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)} = && (7)\\ &= \dot{V}^j(t_0)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} + V^j(t_0)\left(\nabla_{\gamma'(t_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\bigg|_{\gamma(t_0)} && (8)\end{aligned}$$

che scritta in notazione più compatta diventa

$$D_t V = \left(\dot{V}^k + V^j\dot{\gamma}^i\left(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma\right)\right)\partial_k \tag{9}$$

Per quanto riguarda l'esistenza, basta porre per definizione D_tV come nell'equazione 9 e verificare le proprietà:

i)

$$D_t(aV(t_0) + bW(t_0)) =$$
$$= \left(a\dot{V}^j(t_0) + b\dot{W}^j(t_0)\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} + \left(aV^j(t_0) + bW^j(t_0)\right)\left(\nabla_{\gamma'(t_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\bigg|_{\gamma(t_0)} =$$
$$= aD_tV + bD_tW$$

ii)

$$D_t(fV) = (f(t_0)\dot{V}^j(t_0) + \dot{f}(t_0)V^j(t_0))\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} + f(t_0)V^j(t_0)\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\nabla_{\gamma'(t_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\bigg|_{\gamma(t_0)} =$$
$$= f(t_0)\left(\dot{V}^j(t_0)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} + V^j(t_0)\left(\nabla_{\gamma'(t_0)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)}\right) + \dot{f}(t_0)V^j(t_0)\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{\gamma(t_0)} =$$
$$= fD_tV + \dot{f}V$$

iii) Si è già visto nella dimostrazione dell'unicità che se V è estendibile allora

$$D_tV(t_0) = \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)} = \ldots = \nabla_{X_{\gamma(t_0)}}\widetilde{V}$$

□

Teorema 5.4 (Esistenza ed unicità della derivata covariante lungo una curva)**.** *Sia ∇ una connessione lineare su M, allora per ogni curva liscia $\gamma : I \longrightarrow M$ esiste un'unica derivata covariante lungo γ rispetto a ∇.*

Dimostrazione. Si supponga che $\{U_\ell\}$ sia l'insieme costituito da tutti i domini di carte intersecate da $\gamma(I)$. A questo punto γ si "spezza" in tante curve lisce

$$\gamma_\ell : \gamma^{-1}(U_\ell) \longrightarrow U_\ell$$

i cui domini possono certamente intersecarsi. Per il lemma 5.3, su ogni U_ℓ la connessione lineare ∇ induce un'unica derivata covariante

$$D_{t;\ell} : \mathcal{T}(\gamma_\ell) \longrightarrow \mathcal{T}(\gamma_\ell)$$

Se V è un certo campo vettoriale liscio lungo γ, allora indicando per sempicità la restrizione $V|_{\gamma^{-1}(U_\ell)}$ con V_ℓ, si ha che $V_\ell \in \mathcal{T}(\gamma_\ell)$; a questo punto se t_0 è un generico punto di I e vale inoltre che $t_0 \in \gamma^{-1}(U_\ell)$, basta porre

$$D_t V(t_0) := D_{t;\ell} V_\ell(t_0)$$

Tale mappa è ben definita poichè se $t_0 \in \gamma^{-1}(U_{\ell_1}) \cap \gamma^{-1}(U_{\ell_2})$, allora per il lemma 5.3 vale che

$$D_{t;\ell_1} V_{\ell_1}(t_0) = D_{t;\ell_2} V_{\ell_2}(t_0)$$

□

Esempio 5.5 (derivata covariante in $\mathbb{R}^n$ rispetto alla connessione Euclidea)**.** Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva liscia e sia $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, allora rispetto alla connessione Euclidea si ha

$$D_t V(t_0) = \dot{V}^k(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\gamma(t_0)} \qquad \forall t_0 \in I$$

visto che i simboli di Christoffel della connessione Euclidea sono tutti nulli. In sostanza $D_t V$ è determinato esclusivamente dalle derivate delle componenti V^k di V.

6 Geodetiche

In questa sezione verrà introdotto il concetto di geodetica non dal punto di vista variazionale poichè in realtà le proprietà variazionali possedute dalle geodetiche sono una conseguenza della definizione che verrà qui data. Intuitivamente una geodetica sarà una curva con "accelerazione nulla" rispetto ad una connessione fissata, ma il problema è proprio definire il concetto di accelerazione su una varietà astratta M.

Definizione 6.1. Sia ∇ una connessione lineare su M e sia inoltre $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia. Un campo vettoriale liscio lungo γ si dice *parallelo lungo* γ *rispetto a* ∇ se vale che $D_t V = 0$.

Esempio 6.2 (campi vettoriali paralleli in $\mathbb{R}^n$)**.** Rispetto alla connessione Euclidea vale che

$$D_t V(t_0) = \dot{V}^k(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\gamma(t_0)} \qquad \forall t_0 \in I$$

per ogni curva liscia γ e per ogni $V \in \mathcal{T}(\gamma)$, quindi $D_t V = 0$ se e solo se $\dot{V}^k = 0$ al variare di k. Segue che in tal caso i campi vettoriali paralleli lungo una curva in $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i campi vettoriali costanti.

Definizione 6.3. Sia ∇ una connessione lineare su M, allora una curva liscia $\gamma : I \longrightarrow M$ è una *geodetica di* M *rispetto a* ∇ se γ' è parallelo lungo γ rispetto a ∇, ovvero in simboli si deve verificare che

$$D_t \gamma' = 0$$

Il campo vettoriale $D_t \gamma'$ è chiamato *accelerazione* di γ (rispetto a ∇).

Esempio 6.4 (geodetiche in $\mathbb{R}^n$)**.** Rispetto alla connessione Euclidea si ha

$$D_t\gamma'(t_0) = \ddot{\gamma}^k(t_0)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{\gamma(t_0)} \qquad \forall t_0 \in I$$

dunque $D_t\gamma' = 0$ se e solo se $\ddot{\gamma}^k = 0$ per ogni k. Le geodetiche di $\mathbb{R}^n$ sono quindi tutte e sole le curve del tipo $\gamma(t) = At + B$ con $A, B \in \mathbb{R}^n$, ovvero le linee rette (o i segmenti).

A questo punto è lecito chiedersi se su una generica varietà liscia M esistono o meno delle geodetiche, ma fortunatamente anche in questo caso si ha un teorema di esistenza e unicità:

Teorema 6.5 (Esistenza e unicità delle geodetiche)**.** *Sia ∇ una connessione lineare su M, allora per ogni $p \in M$, per ogni $v \in T_pM$ e per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, esiste un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente t_0 ed una geodetica di M rispetto a ∇, $\gamma : I \longrightarrow M$ tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Due qualsiasi geodetiche con tali proprietà concidono nel loro dominio comune.*

Dimostrazione. Sia (U, φ) una carta contenente p, allora per il teorema di unicità ed esistenza della derivata covariante, trovare una geodetica $\gamma : I \longrightarrow U$ rispetto ∇ è equivalente a trovare una soluzione per il seguente sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) = 0 & \forall k = 1, \dots, n \\ \gamma^k(t_0) = \varphi^k(p) & \forall k = 1, \dots, n \\ \dot{\gamma}^k(t_0) = v^k & \forall k = 1, \dots, n \end{cases} \tag{10}$$

Si inseriscano ora le variabili ausiliarie $x^k(t) := \dot{\gamma}^k(t)$, allora il sistema 10 si trasforma nel seguente sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^k(t) = x^k(t) & \forall k = 1, \dots, n \\ \dot{x}^k(t) = -x^j(t)x^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) & \forall k = 1, \dots, n \\ \gamma^k(t_0) = \varphi^k(p) & \forall k = 1, \dots, n \\ x^k(t_0) = v^k & \forall k = 1, \dots, n \end{cases} \tag{11}$$

Per il teorema di esistenza della soluzione per sistemi di ODEs del primo ordine (si veda [Jo.Lee1, Appendix D.1]) esiste almeno una soluzione liscia

$$\eta(t) = \big(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t), x^1(t), \dots x^n(t)\big)$$

in un intorno di t_0 e inoltre tutte le soluzioni coincidono nel loro dominio comune. È stata provata l'esistenza delle geodetiche, mostrando che ne esiste almeno una a valori in una singola carta, ma chiaramente possono essere costruite in modo abbastanza ovvio anche delle geodetiche che intersecano più di una sola carta. Riguardo la seconda parte del teorema che tratta l'unicità, visto che la restrizione di due geodetiche è ancora una geodetica, basta provare che se $\sigma, \gamma : I \longrightarrow M$ sono due geodetiche tali che $q := \gamma(t_0) = \sigma(t_0)$ e $w := \gamma'(t_0) = \sigma'(t_0)$ allora esse coincidono. Innanzitutto per quanto visto nella prima parte della dimostrazione, σ e γ coincidono quantomeno su un intervallo aperto di t_0, poichè è possibile sempre trovare una carta che contiene "porzioni" di entrambe curve in un intorno aperto del punto q; si pone perciò:

$$\beta_1 = sup\,\{b > t_0\ :\ \gamma = \sigma \text{ su } [t_0, b]\}$$

$$\beta_2 = inf\,\{b < t_0\ :\ \gamma = \sigma \text{ su } [b, t_0]\}$$

La dimostrazione procede ora per assurdo, e supporre che questa parte del teorema sia falsa, equivale a dire che almeno uno tra β_1 e β_2 appartiene ad I. Per semplicità si può considerare $\beta_1 \in I$, poichè nell'altro caso si ragiona esattamente nello stesso modo. Siccome γ e σ sono lisce si ha

$$\gamma(\beta) = \lim_{b\to\beta} \gamma(b) = \lim_{b\to\beta} \sigma(b) = \sigma(\beta)$$

$$\gamma'(\beta) = \lim_{b\to\beta} \gamma'(b) = \lim_{b\to\beta} \sigma'(b) = \sigma'(\beta)$$

inoltre è possibile trovare due intervalli aperti J_1 e J_2 contenenti β, tali che $\gamma(J_1)$ e $\sigma(J_2)$ siano entrambi contenuti in un unico dominio di carta A. Le restrizioni rispettivamente di γ su J_1, e di σ su J_2 sono delle geodetiche che risolvono lo stesso sistema di ODEs (ai valori iniziali) in coordinate locali definite da A, quindi per l'unicità della soluzione (si applica ancora una volta il teorema [Jo.Lee1, Appendix D.1]) si deve avere che $\gamma(J_1 \cap J_2) = \sigma(J_1 \cap J_2)$. Ma $J_1 \cap J_2$ è un intervallo aperto contenente β, dunque supponendo che sia $J_1 \cap J_2 =]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$, è stato provato in particolare che $\gamma = \sigma$ su $[t_0, \beta + \varepsilon[$. Ciò contraddice la massimalità di β. □

Definizione 6.6. Una geodetica $\gamma : I \longrightarrow M$ rispetto ad una connessione ∇ si dice *massimale* se per ogni altra geodetica $\delta : J \longrightarrow M$ tale che $I \subseteq J$ e $\delta|_I = \gamma$ si ha che $I = J$.

L'esistenza delle geodetiche massimali è garantita dal lemma di Zorn. Basta considerare infatti il poset delle geodetiche con la seguente relazione d'ordine: siano $\gamma : I \to M$ e $\delta : J \to M$ due geodetiche, allora $\gamma \prec \delta$ se e solo se $I \subseteq J$ e $\delta|_I = \gamma$. Considerando dunque una catena $\gamma_1 \prec \gamma_2 \prec \ldots$, il maggiorante è chiaramente la geodetica γ che ha per dominio l'unione di tutti i domini delle geodetiche della catena, ed è tale che $\gamma(t_0) := \gamma_m(t_0)$ se t_0 è nel dominio di γ_m. In sostanza una geodetica è massimale se non può essere estesa ad un'altra geodetica su un intervallo più grande.

Lemma 6.7. *Sia ∇ una connessione lineare su M, allora per ogni $p \in M$, per ogni $v \in T_pM$ e per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, esiste un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente t_0 ed un'unica geodetica massimale di M rispetto a ∇, $\gamma : I \longrightarrow M$ tale che $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$.*

Dimostrazione. Siano γ_1 e γ_2 due geodetiche massimali con le proprietà descritte nell'enunciato del lemma. Per il teorema 6.5 esse coincidono sul loro dominio comune (che è un intervallo contendente t_0) e dunque possono essere "incollate" per formare un'altra geodetica σ tale che $\gamma_1 \prec \sigma$ e $\gamma_2 \prec \sigma$. □

7 Trasporto parallelo

Nell'introduzione si è accennato al fatto che $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n_p \cong \mathbb{R}^n$. L'isomorfismo canonico tra $\mathbb{R}^n_p$ ed $\mathbb{R}^n$ è dato dalla funzione che manda (p, v) in v; in pratica si può immaginare che il vettore v applicato nel punto p, venga trasportato parallelamente (a se stesso) nell'origine seguendo una certa traiettoria in $\mathbb{R}^n$.
Si vuole cercare di fare la stessa cosa su una varietà astratta, ovvero trasportare "parallelamente" un vettore v di T_pM lungo una certa curva $\gamma : I \longrightarrow M$. Chiaramente su M non è ben definita una nozione di parallelismo come lo è invece su $\mathbb{R}^n$, ma ciò che fornisce informazioni sulla variazione del vettore v lungo un suo spostamento lungo γ, è certamente la derivata covariante lungo γ. La nozione di trasporto parallelo lungo una curva si rivelerà molto importante poichè permetterà di stabilire un isomorfismo tra T_pM e T_qM (con $p \neq q$) che risulta indipendente dalla scelta delle basi, ma che dipende solamente dalla scelta di una curva che connette p e q. Si ricordi a tal proposito che due punti appartenenti ad una componente connessa per archi di M possono sempre essere collegati tramite una curva liscia.

Definizione 7.1. Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia e sia inoltre $v \in T_{\gamma(t_0)}M$. Un campo vettoriale liscio lungo γ V è detto *trasporto parallelo di v lungo* γ, se:

i) V è parallelo lungo γ (si suppone fissata una certa conessione ∇ su M)

ii) $V(t_0) = v$

Quando è chiaro il riferimento alla curva γ (fissata), per semplicità si dirà che V è il trasporto parallelo di v su I.

Teorema 7.2 (Esistenza ed unicità del trasporto parallelo)**.** *Data una curva liscia $\gamma : I \longrightarrow M$, un punto $t_0 \in I$ ed un vettore tangente $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, esiste un unico trasporto parallelo di v lungo γ.*

Dimostrazione. Si supponga dapprima che $\gamma(I)$ sia contenuto in una sola carta. In tal caso esiste un unico trasporto parallelo se e solo esiste ed è unica, una soluzione al seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine dove le funzioni incognite sono le $V^k(t)$:

$$\begin{cases} \dot{V}^k(t) = -\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))V^j(t) & \forall k = 1, \dots, n \\ \\ V^k(t_0) = v^k & \forall k = 1, \dots, n \end{cases} \tag{12}$$

Per il teorema [A-D, 9.5 Th.14] esiste un'unica soluzione globale al sistema 12, dunuqe resta da esaminare il caso un cui $\gamma(I)$ non è contenuto una singola carta. Si supponga per assurdo che il teorema sia falso, ovvero che non esiste un trasporto parallelo lungo tutta la curva γ. Per quanto provato in precedenza, esiste un unico trasporto parallelo V in un intorno $J =]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$, poichè si può scegliere $\eta \in \mathbb{R}_+$ in modo tale che $\gamma(J)$ sia contenuto in una sola carta. Si ponga ora

$$\beta_1 := sup\,\{b > t_0\ :\ \text{esiste un unico trasporto parallelo } V \text{ di } v \text{ in } [t_0, b]\}$$

$$\beta_2 := inf\,\{b < t_0\ :\ \text{esiste un unico trasporto parallelo } V \text{ di } v \text{ in } [b, t_0]\}$$

Siccome si sta assumendo che il teorema sia falso, almeno uno tra β_1 e β_2 appartiene ad I; per comodità si può supporre che $\beta_1 \in I$ poichè nel caso in cui $\beta_2 \in I$ si ragiona nello stesso modo. È possibile allora scegliere $\delta \in \mathbb{R}_+$ in modo tale che $\gamma\left(]\beta_1 - \delta, \beta_1 + \delta[\right)$ sia contenuto in una sola carta. Ancora una volta per la prima parte della dimostrazione esiste un unico trasporto parallelo su $]\beta_1 - \delta, \beta_1 + \delta[$ per il vettore $V\left(\frac{\beta_1-\delta}{2}\right)$, tale trasporto parallelo sarà denotato con $\overline{V}$. Ma $\frac{\beta_1-\delta}{2} \in [t_0, \beta_1[$ dunque V e $\overline{V}$ devono coincidere nel loro dominio comune per via dell'unicità. È stato dunque definito un unico trasporto parallelo $V \cup \overline{V}$ su $[t_0, \beta_1 + \delta[$:

$$\left(V \cup \overline{V}\right)(t) = \begin{cases} V(t) & \text{se } t \in [t_0, \beta_1[\\ \\ \overline{V}(t) & \text{se } t \in [\beta_1, \beta_1 + \delta[\end{cases}$$

ma ciò contraddice la definizione di β_1. □

Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia, allora per ogni $t_0, t_1 \in I$ è ben definita la funzione:

$$\begin{array}{rcl} P_{t_0,t_1} : \; T_{\gamma(t_0)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t_1)}M \\ v & \longmapsto & V(t_1) \end{array}$$

dove V è il trasporto parallelo di v lungo γ. Per il teorema 7.2, una volta fissata γ, la funzione P_{t_0,t_1} è ben definita e inoltre vale il seguente lemma:

Lemma 7.3. *La funzione P_{t_0,t_1} è un isomorfismo di spazi vettoriali*

Dimostrazione. Riguardo la linearità vale che

$$aP_{t_0,t_1}(v) + bP_{t_0,t_1}(v') = aV(t_1) + bV'(t_1) = (aV + bV')(t_1)$$

ma se V e V' sono campi vettoriali lisci e paralleli lungo γ, allora anche $aV + bV'$ è liscio e parallelo lungo γ, ovvero è l'unico trasporto parallelo lungo γ del vettore tangente $av + bv'$; si ha dunque

$$aP_{t_0,t_1}(v) + bP_{t_0,t_1}(v') = P_{t_0,t_1}(av + bv')$$

Si consideri ora la funzione lineare P_{t_1,t_0}, allora chiaramente se V è il trasporto parallelo di $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ lungo γ, allora V stesso è anche il traporto parallelo di $V(t_1)$ lungo γ. Si ha dunque che

$$P_{t_1,t_0} \circ P_{t_0,t_1}(v) = P_{t_1,t_0}(V(t_1)) = V(t_0) = v$$

In pratica P_{t_1,t_0} è l'inversa sinistra di P_{t_0,t_1}, ma $T_{\gamma(t_0)}M$ e $T_{\gamma(t_1)}M$ hanno la stessa dimensione, dunque P_{t_1,t_0} è proprio l'inversa bilatera. □

Si noti che l'isomorfismo P_{t_0,t_1} non dipende dalla scelta delle basi ma dipende solamente dalla scelta della curva γ.
Un'altra conseguenza del teorema 7.2 è l'esistenza di un frame lungo γ costituito da campi vettoriali lisci, tutti paralleli lungo γ.

Lemma 7.4. *Sia $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva liscia, allora esistono n campi vettoriali lisci lungo γ $V_1, \dots, V_n$ tutti paralleli lungo γ, tali che $\{V_1(t_0), \dots, V_n(t_0)\}$ è una base per $T_{\gamma(t_0)}M$ per ogni scelta di $t_0 \in I$.*

Dimostrazione. Si fissi un certo $t_0 \in I$, e si scelga una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per $T_{\gamma(t_0)}M$. Per il teorema 7.2, esistono e sono unici gli n trasporti paralleli $V_1, \ldots, V_n$ e inoltre per ogni $t_1 \in I$ l'insieme $\{P_{t_0,t_1}(v_1), \ldots, P_{t_0,t_1}(v_n)\}$ è una base per $T_{\gamma(t_1)}M$ (poichè P_{t_0,t_1} è un isomorfismo). A questo punto per definizione si ha che

$$\{P_{t_0,t_1}(v_1), \ldots, P_{t_0,t_1}(v_n)\} = \{V_1(t_1), \ldots, V_n(t_1)\}$$

dunque al variare $t_1 \in I$ segue la tesi. □

Un frame con le caratteristiche descritte nel lemma precedente viene semplicemente detto *frame parallelo lungo* γ.

8 Un rapporto incrementale che funziona

È necessario introdurre la connessione su una varietà liscia per poter estendere il concetto di derivata direzionale di un campo vettoriale per varietà astratte. La definizione di connessione (e dunque di derivata covariante) che è stata data è coerente poichè nei vari esempi si è visto che scegliendo la connessione Euclidea su $\mathbb{R}^n$, la derivata covariante di un campo vettoriale coincide proprio con la definizione usuale di derivata direzionale. Anche se si è in possesso una buona definizione di derivata covariante, tale oggetto potrebbe sembrare eccessivamente astratto e ben lontano dall' essere interpretato geometricamente come l'analogo in una varietà astratta M, del solito rapporto incrementale in $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{Y_{p+hv} - Y_p}{h} \tag{13}$$

In precedenza si è visto che la scrittura 13 non ha alcun senso in una varietà astratta M per (almeno) due motivi:

i) Non si riesce immediatamente a dare un senso a $p + hv$.

ii) Pur individuando il punto $p' := p + hv$ su M, è chiaro che deve essere $p' \neq p$, ma allora $Y_{p'} \in T_{p'}M$ e $Y_p \in T_pM$. Non ha dunque senso effettuare la sottrazione $Y_{p'} - Y_p$ pochè sono vettori appartenenti a spazi vettoriali diversi.

In virtù della teoria sviluppata fino ad ora, quello che si vuole fare, è vedere effettivamente come vengono aggirati questi due problemi.
Siano $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, e sia inoltre $p \in M$; esiste dunque un'unica geodetica massimale $\gamma : I \longrightarrow M$, con $t_0 \in I$, tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$. Ora, un punto p' molto vicino a p nella direzione indicata da $v := X_p$, è proprio $p' := \gamma(h)$ con $h \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$, dunque il rapporto incrementale 13 su una generica varietà liscia M diventa

$$\lim_{h \to 0} \frac{Y_{\gamma(h)} - Y_p}{h} \tag{14}$$

Il primo problema è stato superato, ovvero è stato trovato il vettore analogo a Y_{p+hv}; resta ancora aperto il secondo problema, poichè $Y_{\gamma(h)} \in T_{\gamma(h)}M$ mentre $Y_p \in T_pM$. Per il teorema 7.2, (supponendo che sia fissata una connessione lineare su M) esiste un unico trasporto parallelo per $Y_{\gamma(h)}$ lungo γ, dunque l'equazione 15 ha senso se viene scritta nel modo seguente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{h,0}\left(Y_{\gamma(h)}\right) - Y_p}{h} \tag{15}$$

Il rapporto incrementale 15 sembra essere un'ottima definizione di derivata direzionale per un campo vettoriale su M, ma la domanda che sorge spontanea è la seguente: Qual è il nesso tra l'equazione 15 e la derivata covariante? La risposta è che sono la stessa cosa:

Lemma 8.1. *Siano: ∇ una connessione lineare su M, $X, Y \in \mathcal{T}(M)$, e infine $p \in M$. Se I è un intervallo che contiene 0 e $\gamma : I \longrightarrow M$ è una geodetica tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X_p$, allora vale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{h,0}\left(Y_{\gamma(h)}\right) - Y_p}{h} = \nabla_{X_p} Y$$

Dimostrazione. Sia $\{V_1, \ldots V_n\}$ un frame prallelo lungo γ, allora vale che

$$Y_{\gamma(t)} = Y^i(t) V_i(t) \tag{16}$$

e in particolare $Y \circ \gamma$ è un campo vettoriale lungo γ [3]estendibile a Y. Si ha allora che

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{h,0}\left(Y_{\gamma(h)}\right) - Y_p}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Y^i(h) P_{h,0}\left(V_i(h)\right) - Y^i(0) V_i(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{Y^i(h) V_i(0) - Y^i(0) V_i(0)}{h} = V_i(0) \lim_{h\to 0} \frac{Y^i(h) - Y^i(0)}{h} =$$

$$= \dot{Y}^i(0) V_i(0) = D_t(Y^i V_i)(0) = D_t(Y \circ \gamma)(0) = \nabla_{X_p} Y$$

Nella precedente catena di uguaglianze si utilizza pesantemente il fatto che $\{V_i\}$ è un insieme di campi vettoriali paralleli lungo γ. □

È chiaro dunque come l'approccio astratto al problema di trovare una derivata direzionale su varietà lisce, è stato ricondotto ad una situazione geometrica più familiare. Come già detto in precedenza, grazie al teorema 6.5 e alle sue conseguenze, una volta scelti un punto p ed un vettore $v \in T_pM$ esiste una sola geodetica massimale γ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, ovvero una volta fissati tali dati, l'isomorfismo $P_{h,0}$ diventa naturale. È evidente come la connessione su una varietà, insieme a tutti gli altri oggetti che da essa derivano, permette di identificare naturalmente due spazi tangenti "vicini" una volta che si ha in mente lungo quale "direzione" si vuole effettuare la derivata covariante. Da quanto appena detto si intuisce il significato del termine stesso "connessione", ovvero si aggiunge una struttura extra ad una varietà astratta M in modo tale da poter connettere spazi vettoriali vicini e dunque operare con essi come se si fondessero in un unico spazio vettoriale.
Chiaramente le stesse osservazioni non valgono solo per il fibrato tangente TM ma possono essere fatte considerando un generico fibrato vettoriale E su M.

[3]Per coerenza di notazione le componenti di $V \circ \gamma$ andrebbero indicate con $(Y \circ \gamma)^i$, ma per semplicità, solo per la dimostrazione di questo teorema, si scrive solamente Y^i (vedi equazione 16). Non bisogna comunque confondere le componenti di $Y \circ \gamma$ con quelle di Y.

Riferimenti bibliografici

[A-D] William A. Adkins, Mark G. Davidson, *Ordinary Differential Equations*, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, (2012)

[Boo] William M. Boothby, *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*, second edition, Academic Press, (2002).

[J] Jürgen Jost, *Riemannian Geomtery and Geometric Analysis*, sixth edition, Springer, Universitext, (2011).

[Jo.Lee1] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, second edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, (2012).

[Jo.Lee2] John M. Lee, *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, (1997).

[Spi] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (Volume 2)*, third edition, Publish or Perish, (1999).