Sheet 5

May 26, 2021

11) Scrivere esplicitamente l'inversione circolare rispetto alla circonferenza nel piano complesso di centro q e raggio R.

12) Sia $\mathcal{I}_K$ l'inversione circolare rispetto alla circonferenza $K \subset \mathbb{C}$.

   a) Sia C una circonferenza ortogonale a K, in altre parole C interseca K in due punti formando angoli retti (misurati sulle rispettive tangenti). Dimostrare che $\mathcal{I}_K(C) = C$.

   b) Sia z un punto interno a K. Dimostrare che $\widetilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$ è il secondo punto di intersezione di qualsiasi coppia di circonferenze ortogonali a K e passanti per z

13) Dimostrare la seguente proposizione nota come "Teorema di Tolomeo" ($\sim$ 125 d.C.): *in un quadrilatero inscritto in un cerchio la somma del prodotto della lunghezza dei lati opposti è uguale al prodotto della lunghezza delle diagonali.*

14) Sull'insieme dei reticoli del piano complesso si definisca la seguente relazione di equivalenza:

$$\Lambda \sim \Lambda' \text{ se e solo se } \exists \alpha \in \mathbb{C}^\times \text{ tale che } \Lambda' = \alpha\Lambda$$

   a) Mostrare che in ogni classe di equivalenza $[\Lambda]$ si può trovare un rappresentante del tipo $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, con $\tau \in \mathcal{H}$.

   b) Siano $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ e $\Lambda' = \mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$ due reticoli tali che $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$. Dimostrare che $\Lambda \sim \Lambda'$ se e solo se esiste $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tale che $\tau' = M\tau$ (dove con $M\tau$ si indica l'azione standard di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ su $\mathcal{H}$).