Sheet 6

May 14, 2021

15) Si consideri l'azione naturale di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sul semipiano di Poincaré $\mathcal{H}$. Dimostrare che l'insieme delle orbite $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$ è in biezione con il seguente sottoinsieme di $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{D} := \left\{\tau \in \mathcal{H} \colon -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) \leq 0,\ |\tau| \geq 1\right\} \cup \left\{\tau \in \mathcal{H} \colon 0 < \mathrm{Re}(\tau) < \frac{1}{2},\ |\tau| > 1\right\}.$$

[Suggerimento: Per prima cosa disegnare $\mathcal{D}$ sul piano e considerare la sua chiusura $\overline{\mathcal{D}}$ (bisogna aggiungere una semiretta e uno spicchio di ciconferenza a $\mathcal{D}$). Considerare la mappa naturale $\pi \colon \overline{\mathcal{D}} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$, $\tau \mapsto \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\tau$.

(a) *Suriettività di π: Applicando le apposite traslazioni, mediante $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si può assumere sempre che $\tau \in \mathcal{H}$ sta nella "striscia veritcale desiderata". A questo punto, bisogna solo far vedere che se $|\tau| < 1$, allora può essere trasformato, mediante $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, in un τ' tale che $|\tau'| > 1$. Per fare questo, si applichi ripetutamente $\tau \mapsto \tau' = -\frac{1}{\tau}$. Attenzione bisogna spiegare perchè il processo termina dopo un numero finito di passi.*

(b) *Dimostrare che se $\tau_1, \tau_2 \in \overline{\mathcal{D}}$ sono distinti e inoltre $\tau_2 = \gamma\tau_1$ per qualche $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, allora vale almeno una delle seguenti condizioni:*

(1) $\mathrm{Re}(\tau_1) = \pm\frac{1}{2}$ *e* $\tau_2 = \tau_1 \mp 1$

(2) $|\tau_1| = 1$ *e* $\tau_2 = -\frac{1}{\tau_1}$

Per fare questo, assumere che $\mathrm{Im}(\tau_2) \geq \mathrm{Im}(\tau_1)$ e utilizzare la relazione:

$$\mathrm{Im}(\tau_2) = \mathrm{Im}(\gamma\tau_1) = \frac{\mathrm{Im}(\tau_1)}{|c\tau_1 + d|^2}$$

in modo furbo.]

16) Sia $\mathcal{D}$ il sottoinsieme di $\mathcal{H}$ definito nell'esercizio precedente. Calcolare la sua area rispetto alla metrica iperbolica.