1) Sia $G \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ il sottogruppo delle matrici della forma $\left(\begin{smallmatrix} a & 2b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 - 2b^2 = 1$. Verificare che si tratta effettivamente di un sottogruppo. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ l'iperbole di equazione $x^2 - 2y^2 = 1$. Verificare che per ogni $T \in G$ e per ogni vettore $v \in \mathcal{C}$, vale $Tv \in \mathcal{C}$.

2) Con riferimento all'esercizio precedente, sia $G(\mathbb{Z})$ il sottogruppo di G formato dalle matrici a coefficienti interi. Verificare che la matrice $T := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ appartiene a $G(\mathbb{Z})$ ed ha ordine infinito. Dedurre che il gruppo $G(\mathbb{Z})$ è infinito e che l'equazione diofantea $x^2 - 2y^2 = 1$ ha infinite soluzioni intere.

3) Sia $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dimostrare che se T ha ordine finito allora la sua traccia verifica la disuguaglianza $|\operatorname{Tr}(T)| \leq 2$. Dedurre che le matrici di ordine finito in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hanno ordine $1, 2, 3, 4$ o 6.

4) Sia $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ con $T \neq \pm I$. Dimostrare che è diagonalizzabile sui reali se e solo se la sua traccia verifica $|\operatorname{Tr}(T)| > 2$. Dimostrare che è diagonalizzabile sui complessi se e solo se $|\operatorname{Tr}(T)| \neq 2$.

5) Sia p un numero primo. Calcolare l'ordine del gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

6) Sia $n \geq 2$ e sia Φ l'edomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che manda $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3, \ldots, e_n \mapsto e_1$. Calcolare il polinomio caratteristico di Φ.

7) Con riferimento all'esercizio precedente, si consideri la restrizione Φ_H di Φ all'iperpiano $H \subset \mathbb{R}^n$ definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Verificato che si tratta di un endomorfismo di H, calcolarne il polinomio caratteristico.

8) Sia $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo di uni spazio vettoriale V di dimensione 2. Dimostrare che o Φ è multiplo dell'identitá oppure esiste una base di V rispetto alla quale la matrice di Φ si scrive come:

$$\begin{pmatrix} 0 & -d \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

dove $d = \det(\Phi)$ e $t = \operatorname{Tr}(\Phi)$. Dedurre che due matrici non multiple dell'identitá con lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

9) Dimostrare le seguenti affermazioni per $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$:

   a) Se $\operatorname{Tr}(T) = 1$, allora $T^6 = I$.
   b) Se $\operatorname{Tr}(T) = 0$, allora $T^4 = I$ e $T^2 \neq I$.
   c) Se $\operatorname{Tr}(T) = -1$,allora $T^3 = I$.

10) Sia σ una permutazione delle coordinate di $\mathbb{R}^n$. Si consideri il corrispondente endomorfismo $\Phi_\sigma \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che $\det(\Phi_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

11) Si consideri $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ sia $m_\alpha \in \operatorname{End}(\mathbb{C})$ "la moltiplicazione per α". Dimostrare che $\det(m_\alpha) = |\alpha|^2$ e $\operatorname{Tr}(m_\alpha) = 2\Re(\alpha)$.

12) Si consideri $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Per ogni $\alpha = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sia $m_\alpha \in \operatorname{End}(\mathbb{C})$ "la moltiplicazione per α". Dimostrare che $\det(m_\alpha) = a^2 - 2b^2$ e $\operatorname{Tr}(m_\alpha) = 2a$.

13) Si consideri $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tali che $ad - bc \neq 0$ la funzione $F : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definita da:

$$F : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

dove poniamo $F(-d/c) = \infty$, $F(\infty) = a/c$ se $c \neq 0$, e $F(\infty) = \infty$ se $c = 0$. Si indichi con $\mathcal{M}$ l'insieme delle funzioni descritte dall'equazione (1) al variare dei parametri.

a) Verificare che $\mathcal{M}$ è chiuso rispetto alla composizione.

b) Si consideri la mappa:

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\to \mathcal{M} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

verificare che $\phi(AB) = \phi(A) \circ \phi(B)$ e $\phi(I) = \mathrm{id}$

c) Dimostrare che $\mathcal{M}$ è un gruppo, dunque ϕ è un morfismo surgettivo di gruppi.

d) Trovare il nucleo di ϕ.

14) Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2. Sia $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Sia Φ_T la mappa su V definita nel seguente modo:

$$\Phi_T(f) = (cx+d)^2 f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

a) Dimostrare che $\Phi_T \in \mathrm{End}(V)$.

b) Dimostrare che per $T, S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\Phi_T \circ \Phi_S = \Phi_{ST}$.

15) Siano $a_1, \dots a_n$ dei numeri complessi. Sia

$$W(a_1, \dots a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Dimostrare che

$$\det(W(a_1, \dots a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Inoltre se i numeri a_i sono distinti, allora $W(a_1, \dots a_n)$ è invertibile.

16) Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Dimostrare che esistono una matrice ortogonale S ed una matrice diagonale D (a coefficienti in $\mathbb{R}$) tali che $A = S^t D S$.

17) Decomporre il polinomio $f(X,Y) = X^2 + XY + 3Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ come somma di due quadrati. Tale decomposizione è unica?

18) Decomporre il polinomio $f(X,Y) = X^2 + 3XY + Y^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ come prodotto di due fattori lineari. Tale decomposizione è unica?

19) Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $n \geq 2$ (fissato) il numero di variabili delle forme quadratiche che andremo a considerare.

a) Si verifichi che l'insieme delle forme quadratiche su K forma uno spazio vettoriale $\mathcal{Q}(n,K)$ e se ne calcoli la dimensione.

b) Si Consideri l'azione di $\mathrm{GL}_n(K)$ su $\mathcal{Q}(n,K)$ data da $q \mapsto q^M$, dove:

$$q^M(x) := q(Mx).$$

Sia B la matrice simmetrica associata a q e sia B^M la matrice associata a q^M. Scrivere la releazione che lega B^M e B. Scrivere inoltre la relazione che lega $\det(B^M)$ e $\det(B)$.

20) Si considerino le stesse notazioni dell'esercizio 19). Per ogni forma quadratica fissata q, si definisca il sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(K)$ definitto come:

$$O(q) := \{M \in \mathrm{GL}_n(K) \colon q^M = q\}.$$

a) Se B è la matrice simmetrica associata a q, si mostri che

$$O(q) = \{M \in \mathrm{GL}_n(K) \colon M^t B M = B\}\,.$$

b) Si mostri che se q e q' sono due forme quadratiche equivalenti, allora $O(q)$ e $O(q')$ sono coniugati in $\mathrm{GL}_n(K)$.

c) Sia $q = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Dimostrare che $O(q) = O(n)$.

21) Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $n \geq 2$ (fissato) il numero di variabili delle forme quadratiche che andremo a considerare.. Per una fissata forma quadratica q, si consideri:

$$D(q) := \{a \in K^\times \colon aq \text{ è equivalente a } q\}$$

a) Si dimostri che $D(q)$ è un sottogruppo di $K^\times$.

b) Per $K = \mathbb{R}$ e $q = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ si calcoli $D(q)$.

22) Si consideri lo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$.

a) Scrivere la matrice della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno all'asse generato dal vettore $(1,1,2)^t$, in senso antiorario visto da $(1,1,2)^t$.

b) Decomporre la matrice trovata in *a*) come prodotto di due riflessioni.

c) Scrivere la matrice della rotazione di angolo $\pi/3$ attorno all'asse generato dal vettore $(2,1,1)^t$, in senso antiorario visto da $(2,1,1)^t$.

d) Dimostrare che il prodotto delle due rotazioni in *a*) e *b*) è una rotazione. Determinarne l'asse e l'angolo di rotazione.

23) Sia Ψ una isometria di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che Ψ può essere scritta come la composizione di k riflessioni, con $1 \leq k \leq n$. Si tratta di una decomposizione unica?
[*Sugg: Procedere per induzione su n.*]

24) Sia $f : V \to W$ una funzione lineare fra due spazi vettoriali (di dimensione finita). Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

a) f è suriettiva se e solo se esiste una funzione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}$.

b) f è iniettiva se e solo se esiste una funzione lineare $h : W \to V$ tale che $h \circ f = \mathrm{id}$.

25) Sia $\mathcal{O} := \{w_1, \ldots w_k\}$ un insieme di vettori ortonormali di $\mathbb{R}^n$ e sia $W = \langle \mathcal{O} \rangle$. Per un fissato $v \in \mathbb{R}^n$, si consideri:

$$\widehat{v} := \langle v, w_1 \rangle\, w_1 + \ldots + \langle v, w_k \rangle\, w_k \in W\,.$$

a) Dimostrare che $(v - \widehat{v}) \perp W$ e inoltre che $\widehat{v}$ è l'unico vettore di W a soddisfare tale proprietà (si ricordi che v è fissato).

b) Si dimostri che $\widehat{v}$ è l'unico vettore di W a soddisfare la proprietà:

$$||v - \widehat{v}|| < ||v - w|| \quad \forall w \in W \setminus \{\widehat{v}\}$$

c) Si dimostri che $||\widehat{v}|| \leq ||v||$.

26) Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, dimostrare che $S^{\perp\perp} = \langle S \rangle$.

27) Siano $T, S \in \mathrm{SO}(3)$ due matrici di rotazione tali che $TS = ST$. Dimostrare che S e T hanno lo stesso asse di rotazione oppure sono entrambe rotazioni di angolo π intorno ad assi ortogonali.

28) Dimostrare che ogni triangolo iscritto in un cerchio, con un lato coincidente con un diametro, è rettangolo.

29) Si considerino i due piani di $\mathbb{R}^3$ di equazioni rispettivamente $x+y+z=0$ e $y=z$. Calcolare il coseno dell'angolo formato da tali piani. Scrivere le simmetrie dello spazio determinate da tali piani e calcolarne il prodotto.

30) Si consideri la matrice ellittica $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Determinare un'ellisse che è lasciata invariata da M. Si descriva l'orbita di $e_1 = (1,0)^t$ sotto l'azione della moltiplicazione per M.

31) Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ che congiunge i punti di coordinate $(1,1,1)$ e $(-1,2,7)$. Determinare un'equazione cartesiana e una parametrizzazione per r.

32) Usando due metodi *diversi*, scrivere un'equazione cartesiana del piano in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A=(1,2,3)^t$, $B=(-2,1,3)^t$, $C=(3,2,1)^t$.

33) In $\mathbb{R}^3$ si consideri una rotazione ρ di asse una retta h ed angolo $\theta \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Sia r una retta sghemba con h. Si dimostri che $\rho(r)$ e l'asse h sono sghembi. Si determini la posizione reciproca di r e $\rho(r)$.

34) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ dato (rispetto alla base canonica) dalla seguente matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 9/25 & -12/25 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 12/25 & -16/25 & 3/5 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che f è una isometria e classificarla.

b) Si scriva $f = \sigma\rho = \rho\sigma$ con σ riflessione e ρ rotazione.

c) Date le rette

$$r : \lambda(-4,0,3)^t, \quad s : (5,0,0)^t + \mu(0,1,0)^t,$$

si scriva un'equazione cartesiana per r e si calcoli la distanza fra $f(r)$ ed s.

d) Si determinino tutti i piani contenenti la retta s e aventi distanza 3 dall'origine.

35) Dati i seguenti punti dello spazio:

$$P_1 = (1,-1,0)^t,\ P_2 = (1,0,-1)^t,\ P_3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t,\ P_4 = (1,2,1)^t,$$

calcolare il volume del prisma con base il triangolo $T(P_1,P_2,P_3)$ e lato il segmento $\overline{P_1P_4}$.

36) Sia K un campo e si considerino i seguenti gruppi di matrici:

$$\Lambda_n(K) := \{\lambda I_n \colon \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}_n(K),$$

$$\Lambda_n^1(K) := \{\lambda I_n \colon \lambda^n = 1\} \subset \mathrm{SL}_n(K).$$

a) Verificare che $\Lambda_n(K)$ e $\Lambda_n^1(K)$ sono rispettivamente sottogruppi normali di $\mathrm{GL}_n(K)$ e $\mathrm{SL}_n(K)$.

Si definiscano dunque i gruppi quoziente:

$$\mathrm{PGL}_n(K) := \mathrm{GL}_n(K)/\Lambda_n(K),$$

$$\mathrm{PSL}_n(K) := \mathrm{SL}_n(K)/\Lambda_n^1(K).$$

b) Dimostrare che se K è algebricamente chiuso allora $\mathrm{PGL}_n(K) = \mathrm{PSL}_n(K)$.

c) Calcolare il gruppo quoziente $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

d)* Calcolare il gruppo quoziente $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{Q})/\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Q})$.

37)* L'esercizio ha lo scopo di studiare alcune proprietà algebriche del gruppo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

a) Si considerino le seguenti due matrici in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è generato da S e T.

b) Esprimere la matrice $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ in termini di S e T.

c) Dimostrare che $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è generato da S ed ST.

d) Si consideri $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; dimostrare che $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ è generato da T ed U.

Esercizi di fine corso annuale (I)

1) Si parametrizzi il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema:

$$\begin{cases} y - 2z + w = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z + w = 4 \\ x - 3y - 3z + 2w = 5 \end{cases}$$

Si dica qual è la sua dimensione. Si scriva un sistema di equazioni indipendenti equivalente al sistema dato.

2) Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare definita dalla formula

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + y - 2z \\ 3x + y - z \end{pmatrix}$$

Si determinino rette e piani invarianti per Φ. Si dica se Φ è diagonalizzabile. Si scriva l'endomorfismo Φ^2.

3) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Dimostrare che f ha ordine n se e solo se a è una radice primitiva n-esima dell'unità.

4) Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni per matrici a coefficienti reali:

   a) Due matrici A e B sono simili se e solo se A^2 e B^2 sono simili.

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sono simili.

   c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sono simili.

   d) Una matrice A ha autovalore λ se e solo se A^{-1} ha autovalore $\frac{1}{\lambda}$.

5) Sia $A = (a_{ij})_{i,j}$ una matrice diagonalizzabile sui reali tramite una matrice ortogonale (ovvero si ha una base ortonormale di autovettori). Sia $\lambda_{\max}$ un autovalore di A con valore assoluto massimo. Dimostrare che per ogni elemento a_{ii} sulla diagonale di A si ha $|a_{ii}| \leq |\lambda_{\max}|$.

Esercizi di fine corso annuale (II)

1) Determinare un endomorfismo non identicamente nullo di $\mathbb{R}^3$ che sia nilpotente e che conservi i piani:

$$\pi_1 : y = z\,,$$

$$\pi_2 : x - y + z = 0\,.$$

Dimostrare che se Φ è una soluzione del problema, allora si ha $\Phi^2 = 0$.

2) Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il determinante di A e il cofattore C_{11} .

b) Usare *a*) per calcolare il determinante di B.

c) Usare *a*) e *b*) per calcolare il determinante di C.

3) Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare definita dalla formula

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Trovare autovalori e autospazi di Φ. Determinare se Φ è diagonalizzabile.

b) Dimostrare che autovettori corrispondenti ad autovalori distinti di Φ sono ortogonali.

c) Dimostrare che $\mathbb{R}^3 = \ker \Phi \oplus \operatorname{Im} \Phi$.

4) Dimostrare che un endomorfismo è simile al suo trasposto.
[Sugg. Dimostrare prima che un blocco di Jordan di una matrice è simile al suo trasposto.]

Esercizi di fine corso annuale (III)

1) Si parametrizzi il sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema:

$$\begin{cases} y + w = 2 \\ x + y + z = 3 \\ x - z + w = 5 \\ x + y + w = 5 \end{cases}$$

Si dica qual è la sua dimensione. Si scriva un sistema di equazioni indipendenti equivalente al sistema dato.

2) Sia K un campo infinito, dimostrare che K^n non può essere ricoperto da un'unione finita di iperpiani.

3) Scrivere l'espressione della rotazione in $\mathbb{R}^3$ di angolo $\pi/2$ attorno alla retta

$$r \, : x + y + z = y - z - 2 = 0 \, .$$

4) (Esercizio bonus). Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $\mathfrak{f}(n)$ il numero di punti a coordinate intere sulla circonferenza $\{X^2 + Y^2 = n\} \subset \mathbb{R}^2$ di raggio $\sqrt{n}$.

a) Spiegare perchè $\mathfrak{f}(n)$ è un numero finito.

b) Spiegare il significato intuitivo della quantità

$$A(N) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{f}(n) \, .$$

c)* Dimostrare che $\lim_{N \to \infty} A(N) = \pi$.

[*Commento: se avete risposto correttamente a b) non trovate che il risultato c) sia bello?*]

Esercizi di fine corso annuale (IV)

1) Sia $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare definita dalla formula

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3z \\ x + 2y - 3z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}$$

Si determinino rette e piani invarianti per Φ. Si dica se Φ è diagonalizzabile. Si scriva l'inversa di Φ.

2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{F}_p$. Una bandiera completa di V è una successione di sottospazi:

$$\mathcal{B} : \quad V = V_n \supset V_{n-1} \supset \dots V_1 \supset 0$$

tali che $\dim V_i = i$. Data una bandiera completa $\mathcal{B}$, sia $U(\mathcal{B})$ l'insieme degli endomorfismi $\alpha \in \mathrm{End}(V)$, caratterizzati dalle seguenti proprietà valide per ogni indice i:

- $\alpha(V_i) \subset V_i$.
- L'endomorfismo indotto da α su V_i/V_{i-1} è l'identità.

Dimostrare le seguenti affermazioni:

a) Data una bandiera completa $\mathcal{B}$ esiste una base di V tale per cui ogni $\alpha \in U(\mathcal{B})$ può essere espresso come una matrice unitriangolare superiore (i.e. una matrice triangolare superiore con elementi della diagonale principali uguali a 1).

b) $U(\mathcal{B})$ è un p-Sylow di $\mathrm{GL}(V)$.

c) Ogni p-Sylow di $\mathrm{GL}(V)$ è del tipo $U(\mathcal{B})$ per qualche bandiera completa $\mathcal{B}$.

[*Sugg: Per il punto c) utilizzare i teoremi di Sylow.*]

3) Siano W_1 e W_2 due sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Dimostrare che

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)\,.$$

4) Scrivere la riflessione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al piano $\pi_1 : x + y + z = 1$. Scrivere la riflessione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto al piano $\pi_2 : y = z$. Scrivere la rotazione $f \circ g$ e determinarne l'asse e l'angolo di rotazione.