Matematica e Statistica
II Appello, 25/02/2021

Il tempo a disposizione è di 4 ore. È possibile usare una calcolatrice non programmabile. Non è consentito consultare testi o appunti. Giustificare quanto più possibile le risposte e scrivere anche svolgimenti parziali degli esercizi. Non verrà attribuito nessun punteggio numerico alla prova.

Nota. Si ricordi che il simbolo "log" indica il logaritmo in base e.

Analisi Matematica.

1) Studiare il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{\log|x| - 1}$.

2) Stabilire se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

3) Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}.$$

4) Per ognuno dei seguenti casi trovare una successione $\{a_n\}$ che soddisfi tutte le richieste:

   a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{3^n} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^3} = +\infty$.

   b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{3^n} = 0$.

Probabiltà e Statistica

5) Si consideri una random walk asimmetrica con i seguenti parametri: il "passo in avanti" ha probabilità $p = \dfrac{1}{2}$ e lunghezza 2; il "passo all'indietro" ha lunghezza 1.

   a) Determinare la variabile aleatoria che descrive la random walk. Calcolarne inoltre il valore atteso e la varianza.

   b) Si assuma che la random walk modellizzi la passeggiata di un ubriaco per strada e inoltre che l'unità di misura sia il metro. Qual è la probabilità che dopo 6 passi l'ubriaco sia avanzato di 6 metri?

6) Si consideri un'urna contenente tre monete, due delle quali sono regolari, mentre la rimanente è truccata, in quanto le sue facce mostrano entrambe testa.

   a) Si estragga a caso una moneta dall'urna e la si lanci. Qual è la probabilità che esca testa?

   b) Si estragga a caso una moneta dall'urna e la si lanci. Esce testa, dunque qual è la probabilità che tale moneta sia quella truccata?

7) Si consideri la variabile aleatoria $X \sim N(0,1)$ (ovvero si sta assumendo che la distribuzione F_X di X sia la distribuzione normale). Dimostrare che

$$P(-x < X \leq x) = 2F_X(x) - 1\,, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

.